Lycée 20 Mars 1956	Devoir de synthèse N 3	prof : Ben Abdallah
Sfax	4éme MATH 2	2010/2011

Exercice 1 (3pts)

Répondre par vrai ou faux sans justification

1/ pour tout n $\in$ IN n+1 et n^2+2 sont premiers entre eux

2/ pour tout n $\in$ IN $2^n+3^n \equiv 5^n \pmod 6$

3/ on pose pour tout $x \geq 1$ $F(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{\ln t}}{t^2}\,dt$ et $G(x) = \int_0^{\ln x} e^{-t}\sqrt{t}\,dt$

Alors $F(x) = G(x)$ $\forall x \in [1,+\infty[$

4/ La fonction f définie sur IR par f(x) = $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est paire

Exercice 2 (5pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A(1,0,-1) ; B(1,3,5) ; C(-7,2,2) et H(-1,4,3)

1/a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{HC}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HBC) est

x-2y-2z+15=0

c) Montrer que le point H est le projeté orthogonal de A sur (HBC)

2/ On considère l'ensemble S des points M(x,y,z) de l'espace tels que

$X^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1=0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera un centre I et un rayon
b) Vérifier que I est le milieu du segment [AH]

c) Déterminer la position relative de la sphère S et du plan (HBC)

3/ Soit J(0,0,1)

a) Vérifier que J appartient à S
b) Calculer la distance entre I et (AJ)
c) En déduire que (AJ) est tangente à S
d) Donner une représentation paramétrique de (AJ) et déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AJ) et du plan (HBC)

4/ Soit Q l'image du Plan (HBC) par translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et T l'image de S par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{3}{2}$

Déterminer T ∩ Q

Exercice 3 (4pts)

X_i	0	1	2	3	4
Y_i	4.26	3.4	2.01	1.16	1.01

1/a) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X,Y) et interpréter le résultat

b) Donner une équation de la droite de régression de Y en X

c) cette équation permet-t-elle d'estimer le degré de salinité du lac quand il y'aurais 6 mois pluvieux de l'année ?

2/ On pose Z = ln(Y – 1)

a) Donner le tableau correspondant à la série (X,Z) (les résultats seront arrondis au millième)
b) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X,Z)
c) Donner une équation de la droite de régression de Z en X
d) Utiliser cette équation pour répondre à la question 1/c)

Exercice 4 (8pts)

Soit g la fonction définie sur] – Log2, $+\infty$ [par g(x) = $\dfrac{-1}{\sqrt{2e^x-1}}$

Partie A

1/a) Justifier que g est dérivable sur son domaine de définitions et montrer que pour tout réel x de D_g on a $g'(x)=\dfrac{e^x}{(\sqrt{2e^x-1})^3}$

b) Dresser le tableau de variations de g

c) Tracer la courbe C_g dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

2/ Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par f(x) = - Ln(1 + sin(x))

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur] – Log2, $+\infty$ [

c) Soit y un réel de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ On pose x = f(y) montrer que

Sin(y) = e^{-x} – 1

d) Soit G = f^{-1}(x) montrer que G est une primitive de g sur

] – Ln2, $+\infty$ [

e) Calculer alors $\displaystyle\int_0^{Log2} g(t)$ dt

Partie B

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout x de [0, $+\infty$ [on pose

$$G_n(x)=\int_0^x\left[g(t)\right]^n dt$$

1/a) Justifier que pour tout x de [0, $+\infty$ [on a G_1(x) = G(x)

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} G_1(x)=\dfrac{-\pi}{2}$

2/a) Montrer que pour tout réel t de] – Ln2, $+\infty$ [on a [g(t)]^2 = $\frac{e^{-t}}{2-e^{-t}}$

b) Exprimer alors G_2(x) en fonction de x et en déduire $\lim_{x\to+\infty} G_2(x)$

3/a) Montrer que pour tout réel t de [0, $+\infty$ [on a $e^{\frac{-nt}{2}} \leq g(t) \leq 0$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel t de [0, $+\infty$ [on a $|g(t)|^n \leq e^{\frac{-nt}{2}}$

c) Montrer alors que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel t de [0, $+\infty$ [on a $[G_n(x)] \leq \frac{2}{n}$

d) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} G_n(x)$