

## Exercice ①

Soit  $\theta$  un réel de l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

1.a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E):  $(\cos^2 \theta)z^2 - (2\cos^2 \theta)z + 1 = 0$

b) On note  $z_1; z_2$  les solutions de (E) avec  $\text{Im } z_1 \geq 0$ . Écrire  $z_1; z_2$  sous forme exponentielle. Justifier.

2.a) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ :  $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{a \cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{b \cos \theta}{1 + \sin \theta}$

b) On pose  $F(t) = \int_0^t |z_1| d\theta$  où  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Donner l'expression de  $F(t)$  en fonction de  $t$  puis calculer l'intégrale :

$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |z_1| d\theta$ . L'écriture  $|z_1|$  désigne le module de la solution  $z_1$  de l'équation (E).

## Exercice ②

Dans un plan, on donne deux droites parallèles  $(d)$  et  $(\Delta)$  distantes de 5 cm et un point  $A$  situé entre  $(d)$  et  $(\Delta)$  à une distance de 3 cm de  $(\Delta)$ .

$M$  est un point variable du plan et  $H$  son projeté orthogonal sur  $(\Delta)$ .

1) Montrer que si  $MA + MH = 5$  cm, alors  $M$  se déplace sur une parabole  $(S)$  de foyer  $A$ .

Dans ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $A(1; 0)$ .

2) a- Montrer que  $y^2 = 4x$  est une équation de la parabole  $(S)$ .

b- Tracer  $(S)$ .

3) Soit  $E$  un point de  $(S)$  d'ordonnée  $a$  telle que  $a \neq 0$ .

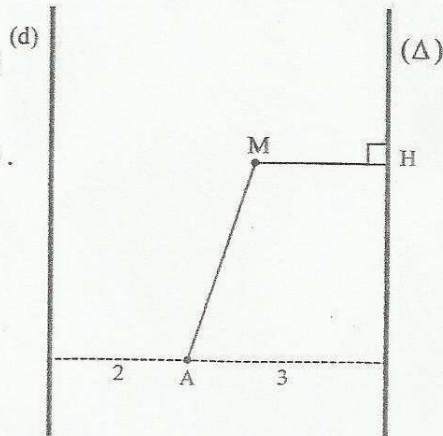
Montrer que  $4x - 2ay + a^2 = 0$  est une équation de la tangente  $(d_1)$  à  $(S)$  en  $E$ .

4) Soit  $G$  un point de  $(S)$  d'ordonnée  $b$  tel que  $\widehat{E\hat{O}G} = 90^\circ$ .

a- Montrer que  $ab = -16$ .

b- La tangente  $(d_2)$  à  $(S)$  en  $G$  coupe  $(d_1)$  en un point  $L$ .

Montrer que, lorsque  $E$  et  $G$  varient sur  $(S)$  tels que  $\widehat{E\hat{O}G} = 90^\circ$ , le point  $L$  décrit une droite que l'on déterminera.





⑤  
EXERCICE (3points)

Pour  $n$  entier naturel non nul on pose :  $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) a-Vérifier que  $n$  est pair pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$

b- Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $a_n \equiv 0 \pmod{3}$

2) Soit  $p$  un nombre premier  $p > 3$

a-Montrer que  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ;  $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  et  $6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

b-Montrer que  $a_{p-2}$  est divisible par  $p$

c-Démontrer que pour tout  $q$  premier il existe un entier naturel non nul  $n$  tel que :  $a_n \wedge q = q$

⑤  
EXERCICE (4points)

1)-On définit sur  $[0, \pi]$  la fonction  $g$  par :  $g(0) = 2a$  et  $g(t) = \frac{at + bt^2}{\sin(\frac{t}{2})}$

a- Déterminer  $a$  et  $b$  pour que :  $\int_0^\pi (at + bt^2) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}$

b- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \left(\sin \frac{2n+1}{2} t\right) dt$

c-Montrer que :  $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \cos(kt) = \frac{\sin(2n+1)t/2}{2 \sin(\frac{t}{2})}$  en déduire que  $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2) Soit  $f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{e^x + 1}$  pour  $x > 0$  et  $f_n(0) = 1$

a- Montrer que :  $0 \leq f_0(x) \leq 1$  et que :  $f_n(x) = f_0(x) - \sum_{k=1}^{k=n} x e^{-kx}$

b- On pose  $I_k(x) = \int_0^x t e^{-kt} dt$  et  $I_k = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_k(x)$  Calculer  $I_k$

3) En utilisant les questions précédentes en déduire

que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_0(t) dt = \frac{\pi^2}{6}$

⑤  
EXERCICE (3points)

Pour  $n$  entier naturel non nul on pose :  $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) a-Vérifier que  $n$  est pair pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$

b- Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $a_n \equiv 0 \pmod{3}$

2) Soit  $p$  un nombre premier  $p > 3$

a-Montrer que  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ;  $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  et  $6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

b-Montrer que  $a_{p-2}$  est divisible par  $p$

c-Démontrer que pour tout  $q$  premier il existe un entier naturel non nul  $n$  tel que :  $a_n \wedge q = q$

⑤  
EXERCICE (4points)

1)-On définit sur  $[0, \pi]$  la fonction  $g$  par :  $g(0) = 2a$  et  $g(t) = \frac{at + bt^2}{\sin(\frac{t}{2})}$

a- Déterminer  $a$  et  $b$  pour que :  $\int_0^\pi (at + bt^2) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}$

b- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \left(\sin \frac{2n+1}{2} t\right) dt$

c-Montrer que :  $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \cos(kt) = \frac{\sin(2n+1)t/2}{2 \sin(\frac{t}{2})}$  en déduire que  $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2) Soit  $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{e^x + 1}$  pour  $x > 0$  et  $f_n(0) = 1$

a- Montrer que :  $0 \leq f_0(x) \leq 1$  et que :  $f_n(x) = f_0(x) - \sum_{k=1}^{k=n} x e^{-kx}$

b- On pose  $I_k(x) = \int_0^x t e^{-kt} dt$  et  $I_k = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_k(x)$  Calculer  $I_k$

3) En utilisant les questions précédentes en déduire

que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_0(t) dt = \frac{\pi^2}{6}$