7C	DEVOIR DE MATHS	DUREE 4H	12/04/2011

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (3 POINTS)

Soit ABCD un quadrilatère convexe de diagonales [AC] et [BD] se coupant en I. Soit P,Q,R et S les projetés orthogonaux respectifs de I sur (AB),(BC),(CD),(DA).

1) Construire la configuration précédente.

2) Montrer que les points A,P,I et S sont cocycliques. Citer trois autres cocyclicités similaires.

3) Montrer que : a) $(\overrightarrow{PS},\overrightarrow{PQ})=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})\ [\pi]$ **b)** $(\overrightarrow{RQ},\overrightarrow{RS})=(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA})\ [\pi]$.

4) Montrer que : $(\overrightarrow{PS},\overrightarrow{PQ})+(\overrightarrow{RQ},\overrightarrow{RS})=2(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CA})\quad[\pi]$

5) En déduire que les points P,Q,R et S sont cocycliques si et seulement si les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires. Illustrer cette situation sur une figure.

EXERCICE 2 (4 POINTS)

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$**. Soit** f_a **l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :** $z'=(\frac{1}{2}+ai)z+\frac{3}{2}-3ai,\quad a\in\mathbb{C}$

1) Reconnaître l'application f_a **et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a : a)** $a=-\frac{1}{2}i$ **b)** $a=i$ **c)** $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $a=\frac{1}{2}$

2) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a\in\mathbb{R}$ **et on note** $\theta=\arg(\frac{1}{2}+ai)$**. On note** $M_0=O(0,0)$ **et** $\Omega(3;0)$**. Pour tout entier naturel** $n\in\mathbb{N}$ **on pose** $M_{n+1}=f_a(M_n)$**. Soit** z_n **l'affixe du point** M_n**.**

a) Montrer que f_a **est une similitude directe de rapport** $\lambda=\frac{1}{2\cos\theta}$**.**

b) Calculer et écrire sous forme algébrique, les nombres z_1 **et** z_2 **en fonction de a.**

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ **on a :** $z_n=3-3\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$**.**

EXERCICE 3 (4 POINTS)

Dans le plan, on considère un rectangle ABCD tel que $AB=2AD=2a$**. Soit le point G tel que** $G=\text{bar}\{(A,-2),(B,4),(C,3),(D,3)\}$**.**

1.a) Montrer que $G=\text{bar}\{(B,2),(C,5),(D,1)\}$**.**

b) Déterminer des réels a ;b et c tels que $G=\text{bar}\{(A,a),(C,c),(D,d)\}$**.**

c) On note I le milieu du segment $[AB]$**. Montrer que** $\overrightarrow{GC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IC}$ **et placer G sur la figure.**

2) Déterminer ; dans chacun des cas suivants ; l'ensemble des points M du plan :

a) $M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow \left\|-2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|4\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}\right\|$

b) $M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

c) $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow -2MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 + 3MD^2 = 6a^2$

d) $M \in \Gamma_4 \Leftrightarrow 2MB^2 - 3MC^2 + MD^2 = 2a^2$

e) $M \in \Gamma_5 \Leftrightarrow (-2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$

EXERCICE 4 (4 POINTS)

Soit la fonction numérique f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$. On pose $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$. 1.a)

1.a)Montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$, on a : $f(x+1) \le F(x) \le f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

b) Montrer que pour tout u de $]0,+\infty[$, on a : $e^u \ge u+1$. En déduire que pour tout x de $]1,+\infty[$, on a :

$$F(x) - 1 \ge \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt.$$

2.a) Montrer que pour tout u de $]0,+\infty[$, on a : $\ln u \le u - 1$.

b) En déduire que pour tout x de $]1,+\infty[$, on a : $\int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt \ge \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

3.a) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{x\to1^+} F(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction F.

c) Tracer l'allure générale de la courbe de F dans un repère orhonormé.

EXERCICE 5 (5 POINTS)

Soit n un entier naturel, $n \ge 1$. f_n et I_n deux fonctions définies sur $I = [1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{(\ln x)^n}{x^2}, \quad \text{et} \quad I_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt.$$

1) Calculer $I_1(x)$ pour $x \ge 1$.

2.a) Soit k un entier, $k\ge1$. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$$

b) En déduire que pour tout $n \ge 1$ on a : $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!\,x} - \dots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!\,x} - \frac{(\ln x)^n}{n!\,x}$

3) Soit un réel $\alpha \ge 1$.

a) Pour tout $x \ge 1$, calculer $f_n'(x)$ et étudier les variations de f_n.

b) Vérifier que l'extremum de la fonction f_n sur l'intervalle $I = [1,+\infty[$ est $y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

c) Montrer que $0 \le I_n(\alpha) \le (\alpha - 1)y_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\alpha)$.

4) Pour tout $x \ge 1$ et $n \ge 1$ on pose : $W_n(x) = 1 + \frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(\ln x)^n}{n!}$

a) Exprimer $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$. **b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n(\alpha)$.**

c) Déduire de ce qui précède la limite γ de la suite numérique (U_n) de terme général:

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

FIN.