Lycée pilote Elkef | Devoir de contrôle № 3 | $4^{ème}$ M_2
Mr : Nsib kais | Mathématiques | Mai 2011

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des trois propositions est exacte.
(Aucune justification n'est demandée)

---

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{100} - e^x =$

$\boxed{A}$ $+\infty$

$\boxed{B}$ $-\infty$

$\boxed{C}$ 0

---

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x^2}-1}{\sin^2 x} =$

$\boxed{A}$ 1

$\boxed{B}$ 2

$\boxed{C}$ 4

---

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x =$

$\boxed{A}$ 1

$\boxed{B}$ e

$\boxed{C}$ $+\infty$

---

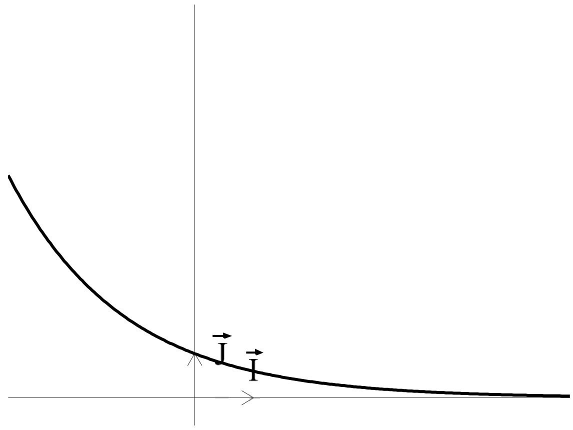
4. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt =$

$\boxed{A}$ $\dfrac{1}{6}$

$\boxed{B}$ $\dfrac{1}{1+e}$

$\boxed{C}$ $\ln(\dfrac{3}{2})$

5. Dans la figure ci-contre, Γ est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a^x$ alors a =



$\boxed{A}$ 0,6

$\boxed{B}$ 1,6

$\boxed{C}$ 2,6

<u>Exercice 2</u> : (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On donne les points A , B et C d'affixes respectives 1 + 2i , 5 - 2i et -1 . Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{2} i\bar{z} - 1 + \frac{1}{2} i$.

1. Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport . Vérifier que le point C est le centre de f et que son axe Δ a pour équation y = x + 1.
2. Soit g la similitude indirecte qui transforme O en C et A en B.
   a. Donner l'écriture complexe de g .
   b. On pose h = fog. Soit M un point quelconque du plan, d'affixe *z*, On désigne par M' son image par h et on note z' l'affixe de M'.
   Montrer que $z' = (1+i)z - 1$ puis caractériser h.
3. Soit M un point d'affixe z, on note x la partie réelle z et y sa partie imaginaire. On pose M' = h(M).
   a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si : $3x - 7y = 5$.
   b. Déterminer alors tous les points M d'affixe z à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 15 tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OB}$ soient orthogonaux et $x, y \in \mathbb{Z}$.

<u>Exercice 3</u> : (3 points)

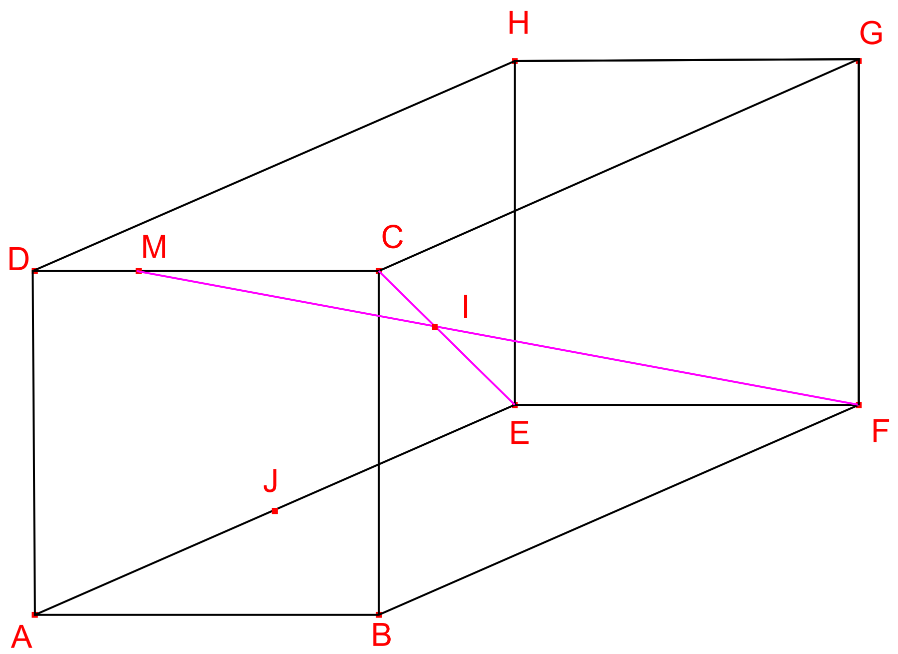
1. a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le couple $(14n+3, 21n+4)$ est solution de l'équation (E) : 3x – 2y = 1.
   b. En déduire $(14n+3) \wedge (21n+4)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $d = (2n+1) \wedge (21n+4)$.
   a. Montrer que d = 1 ou d = 13 .
   b. Montrer que d = 13 si et seulement si $n \equiv 6[13]$
3. Pour tout entier naturel n distinct de 1, on pose $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.
   a. Montrer que A et B sont divisibles par (n-1).
   b. Déterminer suivants les valeurs de n, $A \wedge B$.

<u>Exercice 4</u> : (5 points)

Dans la figure ci-dessous ABCDEFGH un parallélépipède droit tels que $AB = AD = \frac{AE}{2} = 1$.

On désigne par M le point de l'arête [DC] tel que $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

1. a. Montrer que les droites (CE) et (FM) se coupent en un point I.
   b. On désigne par h l'homothétie de centre I qui transforme C en E.
   Déterminer h((CD)) et h((FM)), en déduire h(M).
   c. Prouver h est de rapport $-\frac{3}{2}$.
2. Soit J le milieu du segment [AE] , on munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AD})$.
   a. Vérifier que le point I a pour coordonnées $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.
   b. On pose $N(1, 0, \frac{1}{3})$, montrer que h(N) = H.
3. a. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{IM}$, en déduire l'aire du triangle IMC.
   b. Calculer le volume du tétraèdre IMCN. en déduire le volume du tétraèdre IFEH.
4. Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{6}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5}z + \frac{18}{25} = 0$
   a. Montre que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
   b. Vérifier que le point $I \in S$ et que S est tangente au plan (ABC) .
   c. On pose h(S) = S'. Montrer que S' est tangente au plan (EFH) en un point dont on précisera les coordonnées et qu'elle est extérieurement tangente à la sphère S.



Exercice 5:(5 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f_n(x)=\sqrt{x^n}\,e^{-\frac{x}{2}}$

On désigne par Γ_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, et par S_n le solide de révolution obtenu par rotation de Γ_n autour de l'axe (OX). Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par V_n le volume du solide S_n. On a représenté ci-dessous (**Figure1**) les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ et Γ_6 …

1. Que peut-on conjecturer quant à la monotonie et la convergence de la suite (V_n) ?
2. a. Calculer V_1 .
   b. Montrer que la suite (V_n) est monotone, en déduire qu'elle est convergente.
   c. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ $V_{n+1} = -\frac{\pi}{e} + (n+1)V_n$.
   d. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ $\frac{\pi}{e(n+1)} \leq V_n \leq \frac{\pi}{en}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.
3. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $U_n = \frac{V_n}{n!}$.
   a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ $U_{n+1} = -\frac{\pi}{e(n+1)!} + U_n$.
   b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ $V_n = \pi n!(1-\frac{1}{e}\sum\limits_{p=0}^{n}\frac{1}{p!})$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$.
   c. Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre les solides S_2 et S_5 . (**Figure2**)

Figure 1

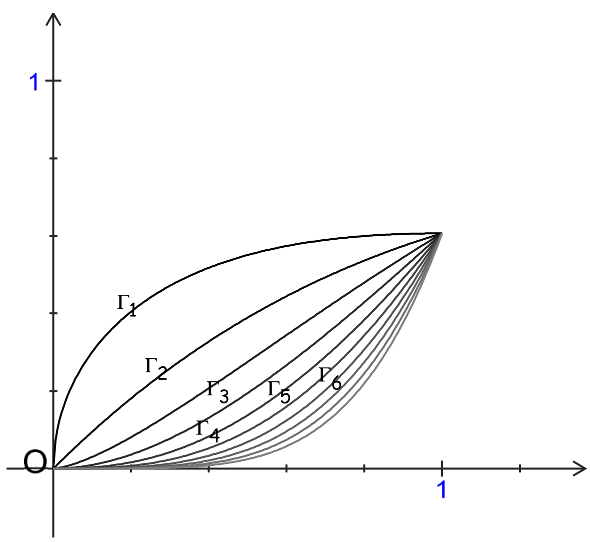


Figure 2