

Lycée O chatti de M'SAKEN Le :13/05/2011	<u>Devoir de synthèse n°3</u>	4 ° MATHS Durée : 4 heures Mr :Karmous Abdelhamid
---	-------------------------------	---

Exercice 1 (3points)

Q.C.M

Pour chacune des questions suivantes, une seule des propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant a la réponse choisie , sans justification .

1)La droite de régression Y en X d'une série statistique double est donnée par : $y = - 5x + 20,75$.

- i) Le coefficient de corrélation linéaire $r(x,y)$ est égal a :
 - a) 1,01 b) 0,99 c) - 0, 93
- ii) Sachant de plus que $Cov(x,y) = - 2,5$ alors la variance de X est
 - a) $V(x) = 2$ b) $V(x) = - 0,5$ c) $V(x) = 0,5$
- iii) Si $\bar{X} = 2$; alors on a : \bar{Y} est égale
 - a) 1 b) 10,75 c) 30,75

2) le chiffre des unités de l'entier $(2009)^{2010}$ est :

- a) 1 b) 9 c) 0

3) Soit f une similitude indirecte qui a tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z' = 2i \bar{z}$.

Alors une Equation de son axe est :

- a) $y = x + 1$ b) $y = x$ c) $y = 2x - 1$

4) Le tableau statistique suivant donne l'âge x_i en mois et le poids y_i en kilogramme d'un enfant durant ses premiers mois.

Age X_i	2	3	4	5	9	15
poids y_i	6	6,8	7,5	7,8	10,6	12,4

a. Le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique (X, Y) est :

- a) $r = 0,8675$ b) $r = 0.9847$ c) $r = 2,3451$

b. L'estimation du poids de cet enfant à l'âge de 18mois est :

- $P_1 : 15,4$ $P_2 : 14,3$ $P_3 : 20,5$ $P_4 : 12,6$

Exercice2 (4points)

- 1) a) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 .
b) Montrer que l'entier $(2000)^{2010} - 1$ est divisible par 7
- 2) Pour tout entier naturel n on pose : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$
 - a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} on a : $4S_n = 5^{n+1} - 1$
 - b) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} ; S_n et 5^n sont premiers entre eux .
 - c) Soit a un entier ; montrer que : $4S_n \equiv a \pmod{7}$ **si et seulement si** $S_n \equiv 2a \pmod{7}$
 - d) En déduire le reste de la division euclidienne de S_{2011} par 7
 - e) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que S_n soit divisible par 7
- 3) Soit n un entier naturel non nul donné .On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :
(E) : $5^n x + S_n y = 1$
 - a) Justifier que (E) admet au moins une solution
 - b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)
- 4) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système suivant :
$$\begin{cases} 25x + 31y = 1 \\ x \equiv y \pmod{5} \end{cases}$$

Exercice3 (6points)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{x+1}$; on désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, \vec{u}, \vec{v})

- 1) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) Justifier la dérivabilité de f sur $] -1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
- 3) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe (\mathcal{C})
- 4) Soit λ un réel supérieur ou égal à -1 et S_λ le solide, engendré par la rotation, de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \lambda$, autour de l'axe des abscisses.

a- Calculer à l'aide d'une intégration par parties le volume $\mathcal{V}(\lambda)$ de ce solide.

b- Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\lambda)$

- 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soit la fonction F_n définie sur \mathbb{R} par $F_n(x) = \int_{e^{-x}}^e (1 - \ln t)^n dt$ et $f_n(x) = (1+x)^n e^{-x}$
 - a) Montrer que F_n est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer $F_n'(x)$.
 - b) En déduire que pour tout x de \mathbb{R} on a : $F_n(x) = \int_{-1}^x (1+t)^n e^{-t} dt$
 - c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de \mathbb{N}^* et pour tout x de \mathbb{R} $F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$
- 6) On considère la suite (I_n) définie par : $I_n = F_n(0) = \int_1^e (1 - \ln t)^n dt$
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$
 - b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.
En déduire que (I_n) converge Puis donner sa limite.
- 7) On pose $U_n = \frac{I_n}{n!}$
 - a) Montrer que : $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$
 - b) En déduire que : $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} = e - U_n$. Calculer la limite de $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 4 (4points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6 = 0$.

- 1) Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre I et le rayon.
- 2) Soit $A(3, 1, 2)$, $B(1, 3, 2)$ et $C(1, -1, -2)$.
 - a- Montrer que ABC est un triangle rectangle en A et calculer son aire.
 - b- Calculer les composantes du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y - z - 2 = 0$.
- 3) Montrer que l'intersection de (S) et du plan (ABC) est le cercle circonscrit au triangle ABC .
- 4) Soit h l'homothétie de centre I et de rapport -2 et le point $J(2, 2, -1)$. On désigne par A', B', C' et J' les images respectives de A, B, C et J par h .
 - a- Calculer le volume du tétraèdre $ABCJ$ et en déduire, en justifiant, celui du tétraèdre $A'B'C'J'$.
 - b- Justifier sans calcul que le volume du tétraèdre $A'B'C'J$ est inférieur à celui de $A'B'C'J'$.
 - c- Calculer maintenant le volume du tétraèdre $A'B'C'J$.

Exercice 5 (3points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle en A et tel que : $(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\overline{CA}, \overline{CB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ On désigne par J le projet orthogonal de A sur (BC) .

- 1) Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et C sur A .
 - a) Déterminer le rapport et l'angle de S .
 - b) Montrer que le centre de S est le point J .
 - c) Déterminer et construire l'image B' du point B par S .
- 2) Soit D le point de la demi droite $[AC)$ tel que $AD=AB$. On rapporte le plan P au repère orthonormé direct $R = (A, \overline{AB}, \overline{AD})$.
 - a) Déterminer les affixes des points B et C selon le repère R .
 - b) Soit M un point d'affixe z du plan P et M' le point d'affixe z' tel que $S(M) = M'$.
Vérifier que $z' = i\sqrt{3}z + 1$
 - c) Retrouver alors le rapport et l'angle de S et déterminer l'affixe du point J .