Lycée Pilote kairouan Année Scolaire 2011-2010		Prof :Troudi kamel Devoir de synthèse n°3	
13-05-2011	Classe : $4^{ème}M_1$	Mathématiques	Durée : 4 heures

NB : Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation des copies

Exercice 1 (3points)

L'élève doit remplir et remettre l'annexe ci-joint .

Exercice 2 (4points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(z-2+i)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ On désigne par A,B,C les images des solutions de (E)

1)Sans résoudre (E) déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

2)a) Caractériser l'application qui à M(z) associe M'(z') tel que : z' = z -2 + i .

b) Montrer que ABC est un triangle équilatéral

c) Construire ABC.

3) On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}z$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

* M_0 a pour affixe $z_0 = -2$.

* Pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.

* On appelle z_n l'affixe de M_n.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer les points M_0, M_1, M_2.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_n = 2^{n+1}e^{i\left(\pi+\frac{3\pi n}{4}\right)}$.

4) Soient deux entiers n et m tels que n soit supérieur ou égal à m.

a)Montrer que deux points M_n et M_m sont tels que $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OM_m}$ colinéaires si de même sens , et seulement si, (n− m) est multiple de 8.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (F): $4x - 3y = 3$.

c) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que A_n appartienne à la droite Δ : y= x

Exercice 3(5points)

On considère la fonction définie sur $]-2,2[$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$

on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a)Montrer que que f est impaire

b) Dresser le tableau de variation de f. En déduire que f réalise une bijection de $]-2,2[$ sur $\mathbb{R}$.

c) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2) a)Ecrire une équation cartésienne de la tangente **T** à (C_f) au point O.

b) Montrer que pour tout $t \in [0,2[$ on a: $f'(t) \geq 1$.

c) Etudier la position de (C_f) par rapport à **T**.

d) Tracer **T** ainsi que les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère

4)a)Vérifier que $f^{-1}(x) = 2\dfrac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}$ et en déduire une primitive de f^{-1}.

b) Calculer l'aire du domaine **D**$=\left\{M(x,y)\in P,\ 0\leq x\leq 2\ln 2\ \ et\ \ 0\leq y\leq f^{-1}(x)\right\}$

5) Soit (I_n) la suite définie sur IN* par: $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

a) Montrer que (I_n) est minorée par zéro.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante ; en déduire que (I_n) est convergente.

c) Démontrer que pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $n \in$ IN*on a: $0 \leq t^n f(t) \leq t^n \ln 3$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

<u>Exercice 4</u>(4points)

On donne dans le plan orienté, un triangle équilatéral ABC, tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)$

On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et passant par B soit D un point de $\mathscr{C}$, et E le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)$. On désigne par I,J et K les milieux respectifs des segments [AB] , [AE] et [DC].

(Pour la figure en prendra AB =4cm)

1)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui envoie A en E et B en A

b) Montrer que g est une symétrie glissante. Et donner sa forme réduite.

2) On désigne par S et S' les similitudes directes de centres respectifs C et D telles que S(A) = I et S' (J) = A

a) Déterminer l'angle et le rapport de chacune des similitudes S et S'

b) Construire L = S'(K)

3) On pose f = SoS'.

a) Montrer que f est une rotation.

b) Montrer que L, A et K sont alignés.(on pourra utiliser la formule d'El Kashi).

c) Montrer que S(L) = K . En déduire que IKJest un triangle équilatéral.

4) Soit M le milieu de $[JK]$. On pose : $\sigma = h_{(I,-\frac{\sqrt{3}}{2})} o R_{(I,-\frac{5\pi}{6})}$.

a)Caractériser σ puis déterminer σ (K).

b) Déterminer l'ensemble des points M lorsque D décrit $\mathscr{C}$.

<u>Exercice 5</u> (4points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ et on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\Re=\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. (unité graphique : 3cm)

1) a) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f_d'(0)=0$

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $f'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-3x)}{x^5}$

c) Dresser alors le tableau de variation de f et construire $\mathscr{C}_f$

2) Soit α un réel vérifiant $\alpha>1$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations respectives $y=0$; $x=1$ et $x=\alpha$

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

3) Soit F définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^x t^2 f(t)dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$, $\forall\ x\geq 1$

b) Montrer que $\forall\ x\geq 1$; $\frac{1}{e}\ln x\leq F(x)\leq e^{-\frac{1}{x}}\ln x$

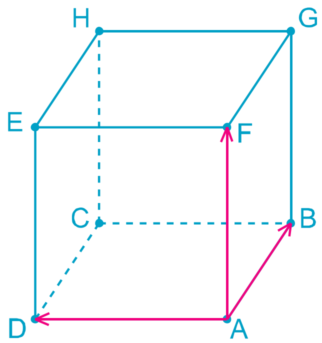
c) Dresser alors le tableau de variation de F puis tracer l'allure de $\mathscr{C}_F$. On précisera la demi tangente à $\mathscr{C}_F$ en $A(1, F(1))$

Annexe a rendre

Nom&prénom :............................

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. L'élève doit cocher la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

La figure ci-contre représente un cube ABCDFGHE tel que AB=1. On munit l'espace E du repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AF})$ est orthonormé direct .



1) Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ est égale à

□ $\vec{FA}$ □ $2\overrightarrow{AF}$ □ $\overrightarrow{AF}$

2) Le vecteur $\overrightarrow{GF} \wedge \overrightarrow{GA}$ est égale à :

□ $\vec{0}$ □ $2\overrightarrow{AE}$ □ $\overrightarrow{HG}$

3) Le volume du tétraèdre ABCG est :

□ $\frac{1}{3}$ □ $\frac{1}{6}$ □ 4

4) Le réel $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AF}$ est égale à :

□ 0 □ 8 □ 1

5)a)Le plan (BGE) a pour équation :

□ x+y-1=0.
□ x+z-1=0.
□ y+z-1=0.

b) Le système d'équations : $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ est celui de:

□ De la droite (EH).
□ De la droite (BG).
□ De la droite (EG).

c) L' intersection des plans d'équations x+y-1=0 et z = 0 est:

□ La droite (EH).
□ La droite (DB).
□ De la droite (EF).

d) Le centre Ω et le rayon de la sphère circonscrite au cube ABCDEFGH sont:

□I$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et R=4

□I$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et R=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

□I$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et R=$\sqrt{3}$.

6)Limage du plan (BGH) par la translation $t_{\overrightarrow{AE}}$ est :

□ Le plan(AEH).
□ Le plan(BGC).
□ Le plan(AEF).