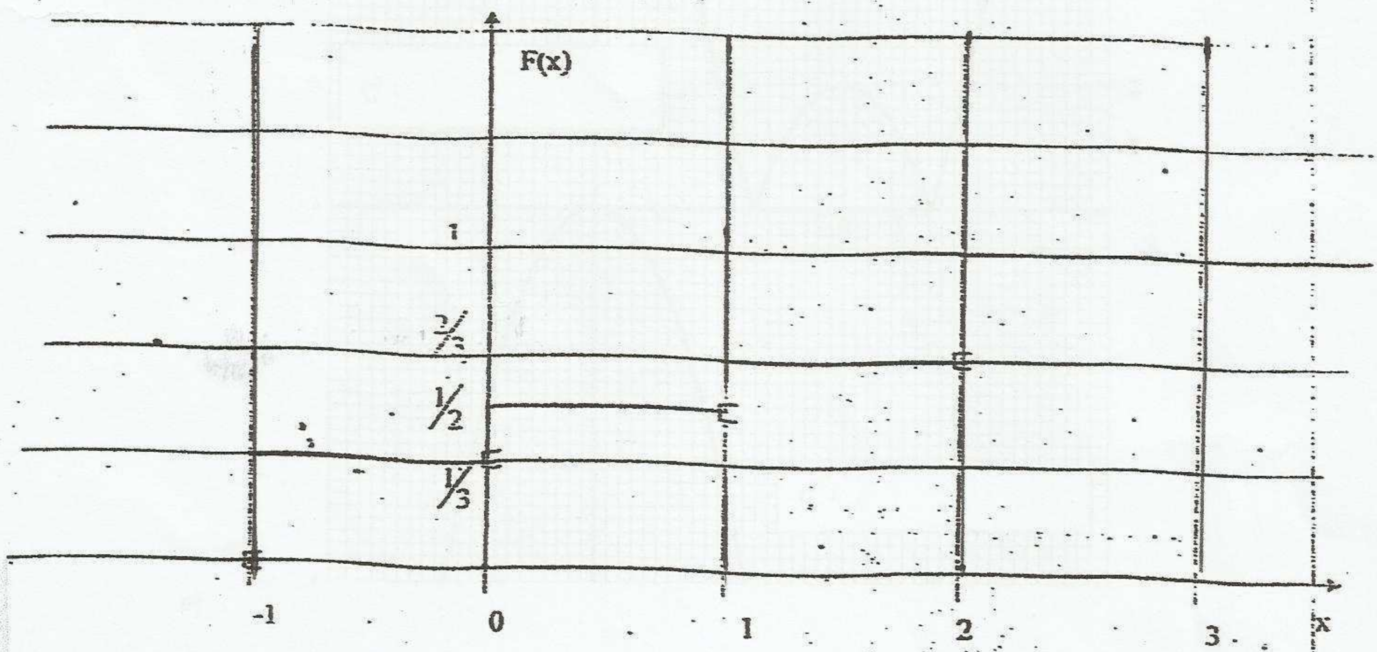
Exercice n°1 (5 points)

1°) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; soit S la sphère de centre I(1,1,0) et de rayon 2 et S' la sphère de centre J(0,1,0) et de rayon 4. Soit h l'homothétie qui transforme S en S' et de rapport positif. L'expréssion analytique de h est :

a) $\begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = 2y - 1 \\ z' = 2z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y + 1 \\ z' = 2z \end{cases}$

2°) Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est représenteé sur la figure ci-contre.



On a alors :

a) $p(X = 1) = \dfrac{2}{3}$ b) $p(X \leq 1) = \dfrac{1}{2}$ c) $p(-1 \leq X \leq 1) = \dfrac{2}{3}$

3°) Soit dans $\mathbb{Z}$ le systhéme (S) $\begin{cases} x \equiv 0 (\text{mod } 6) \\ x \equiv 2 (\text{mod } 4) \end{cases}$. L'ensemble des solutions de (S) est :

a) l'ensemble vide b) $\{12k + 6, k \in \mathbb{Z}\}$ c) $\{24k + 6, k \in \mathbb{Z}\}$

II) Vrai ou faux :

1°) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramétre λ. Alors

a) $p(X > 2) > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda < \dfrac{\ln 2}{2}$.

b) il existe des paramétres λ tels que $p(1 \leq X \leq 2) > \dfrac{1}{2}$.

2°) On lance 10 fois de suite un dé équilibré portant les nombres 1 à 6 et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de « 5 » obtenu. On a alors $p(X = 4) = p(X = 6)$.

4°) (C) est l'ensemble des points d'affixe Z vérifiant $4|z - 1 - i| = \sqrt{2}|z + \bar{z} + 4|$

A : (C) est un cercle de centre O'(1,1)

B : (C) est une ellipse de foyer O'(1,1) et d'excentricité $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

C : (C) est une ellipse de foyer O'(1,1) et de directrice la droite (D) : x = - 2

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

EXERCICE 2 (6points)

L'objet de l'exercice est l'étude de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\int_0^1 e^{-x\ln(1+t^2)}\,dt.$$

1. Montrer que pour tout réel x, $F(x)$ a un sens.
2. (a) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

   $$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}F(1).$$

   En déduire une relation entre $F(1)$ et $F(2)$ et calculer $F(2)$.

   (c) Plus généralement, établir une relation de récurrence entre $F(n)$ et $F(n+1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

   (d) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, exprimer $F(-n)$ à l'aide d'une somme.
   Donner les valeurs de $F(-1)$ et $F(-2)$ sous forme de fractions.
3. Montrer que F est décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Déterminer le sens de variation sur $[0,1]$ de la fonction $t\longmapsto e^{-x\ln(1+t^2)}$ lorsque $x<0$, puis exprimer sa valeur pour $t=1/2$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$.

   (c) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{F(x)}{x}$. Qu'en résulte-t-il pour le graphe de F ?
5. (a) Montrer que $\forall t\in[0,1]$, $\frac{1}{2}t^2\leqslant\ln(1+t^2)$.

   (b) En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}_-$, $F(x)\leqslant\int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}}\,dt$.

   (c) Soit $\phi(x)=\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$. On admet que $\phi(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

   Pour $x>0$, exprimer $\int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}}\,dt$ à l'aide de la fonction ϕ. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$.

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

BAC BLANC EPREUVE DE MATHEMATIQUES **4**MATHs durée 4h

Exercice n°2 (5 points)

1° Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x + \frac{1-ke^x}{1+ke^x}$.

a) Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : 2y' = (y-x)^2 + 1.$$

b) En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

2° On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Sur la figure ci-contre, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, la droite D' d'équation $y = x + 1$ et plusieurs courbes C_k correspondant à des valeurs particulières de k.

Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O puis celui associé à la courbe C' passant par le point A de coordonnées (1 ; 1).

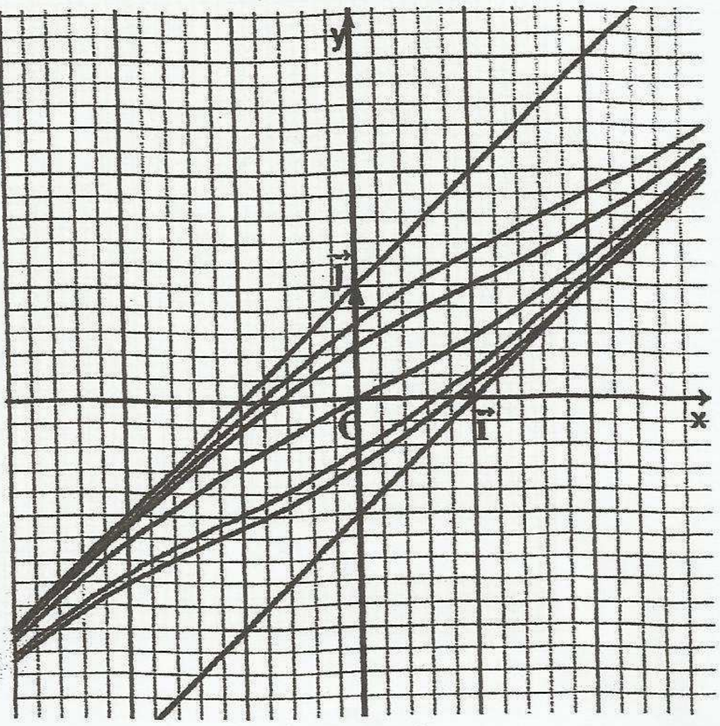
3° On remarque que, pour tout x réel, on a :

$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1+ke^x}$ (1) et

$f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x}$ (2).

En déduire pour tout k strictement positif :

- la position de la courbe C_k par rapport aux droites D et D'.
- les asymptotes de la courbe C_k.



4) On pose

$(\mathcal{D}) = \{ M(x,y) \text{ tel que } \ln 2 \le x \le 1 \text{ et } x \le y \le f_{\frac{1}{e}}(x) \}$

et (S) le solide obtenu par révolution de $(\mathcal{D})$ autour de $(O, \vec{i})$.

Calculer V(S).

Exercice n°3 (4 points)

I/ Soit $n \in \mathbb{Z}$, on pose $a = 3n + 8$ et $b = n+1$

1) Montrer que $a \wedge b = b \wedge 5$
2) Déterminer les entiers n tels que $a \wedge b = 5$
3) En déduire $(3 \times 101^{2008} + 8) \wedge (101^{2008} + 1)$

II/ 1) Justifier que l'équation (E) : $65x + 77y = 1$ admet au moins une solution

2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E') : $65x + 77y = 5$

3). Déterminer s'ils existent des couples d'entiers naturels solutions de (E')

MR YOUSSEF BOULILA LYCEE BOURGUIBA HM-GHZEZ

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...