

**Exercice 1 (3 points)**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

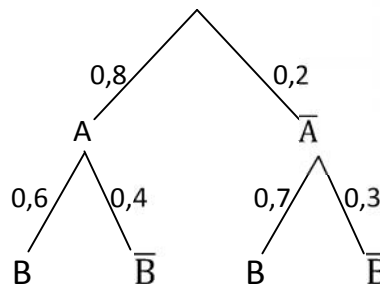
L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse fautive ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- 1) Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.

La probabilité de l'évènement  $A \cup B$  est égale à:

- a) 0,48      b) 0,94      c) 0,14



- 2) La fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln(x)$  est une densité de probabilité sur l'intervalle :

- a)  $]0; +\infty[$       b)  $]0; 1]$       c)  $[1; e]$

- 3) La durée de vie  $X$ , exprimée en années, d'une machine électrique suit une loi exponentielle de paramètre 0,5. La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 10 ans est égale à :

- a)  $e^{-5}$       b)  $1 - 0,5e^{-5}$       c)  $1 - e^{-5}$

- 4) Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $P$  la parabole d'équation:  $y^2 - 4x = 4$ .

La tangente à  $P$  au point  $A(8, 6)$  a pour équation dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ :

- a)  $3y - x = 10$       b)  $2y - 9x = 10$       c)  $2y - 3x = 10$

**Exercice 2 (5 points)**

A- On considère l'équation différentielle  $(E_n): y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$  où  $n$  est un entier naturel non nul.

- 1) On considère deux fonctions  $g$  et  $h$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  et telles que  $g(x) = h(x)e^{-x}$  pour tout réel  $x$ .

- a- Montrer que  $g$  est solution de  $(E_n)$  si et seulement si, pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$   
 b- En déduire la solution  $g$  de  $(E_n)$  vérifiant  $g(0) = 0$ .

- 2) Soit  $\varphi$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- a- Montrer que  $\varphi$  est solution de  $(E_n)$  si et seulement si,  $(\varphi - g)$  est solution de l'équation  $(E): y' + y = 0$ .  
 b- Résoudre l'équation  $(E)$  puis déterminer la solution  $f_{n+1}$  de  $(E_n)$  vérifiant  $f_{n+1}(0) = 0$ .

B- Soit  $(I_n)$  la suite réelle définie, sur  $\mathbb{N}$ , par  $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$  et  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) a- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$

- b- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$

- 2) a- Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_k - I_{k-1} = -\frac{e^{-1}}{k!}$

- b- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1}}{k!}$

- 3) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$ .

### Exercice 3 (4 points)

Soit  $A$  l'ensemble des entiers naturels  $n$  vérifiant  $1 \leq n \leq 46$ .

1) On considère l'équation (E):  $23x + 47y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont deux entiers relatifs.

- Vérifier que  $(-2, 1)$  est une solution de l'équation (E).
- Résoudre, dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , l'équation (E).
- En déduire qu'il existe un unique élément  $x$  de  $A$  tel que  $23x \equiv 1 [47]$ .

2) Soit  $a$  et  $b$  sont deux entiers relatifs.

- Montrer que si  $ab \equiv 0 [47]$  alors  $a \equiv 0 [47]$  ou  $b \equiv 0 [47]$ .
- En déduire que si  $a^2 \equiv 1 [47]$  alors  $a \equiv 1 [47]$  ou  $a \equiv -1 [47]$ .

3) Montrer que, pour tout élément  $p$  de  $A$ , il existe un entier relatif  $q$  tel que  $pq \equiv 1 [47]$ .

4) On admet que, pour tout élément  $p$  de  $A$ , il existe un unique élément de  $A$ , noté  $\bar{p}$ , tel que  $p\bar{p} \equiv 1 [47]$ .

- Déterminer les éléments  $p$  de  $A$  vérifiant  $p = \bar{p}$ .
- Montrer que  $46! \equiv -1 [47]$ .

### Exercice 4 (4 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie. Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé:

- Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6.
- Si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note  $B$  l'évènement « le jeton tiré est blanc » et  $G$  l'évènement « le joueur gagne le jeu ».

A- 1) Montrer que  $p(G) = \frac{7}{30}$  (On pourra s'aider d'un arbre pondéré.)

2) Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3) Un joueur fait  $n$  parties de façon indépendante. ( $n$  est un entier naturel supérieur à 2.)

- Calculer la probabilité  $p_n$  qu'il en gagne au moins une.
- Quel nombre minimal de parties doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit strictement supérieure à 0,99 ?

B- L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent:

- Chaque joueur paie 1 dinar par partie.
- Si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 dinars.
- Si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

1) Donner la loi de probabilité de  $X$ .

2) Prouver que le jeu est défavorable à l'organisateur ?

3) L'organisateur décide de modifier le nombre  $n$  de jetons noirs ( $n$  est un entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier  $n$  le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

### Exercice 5 (4 points)

1) Soit  $g$  la fonction définie, sur  $\mathbb{R}$ , par  $g(x) = (1 - 2x)e^{2x} + 1$ .

- a- Etudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
- b- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et vérifier que  $0 < \alpha < 1$ .
- c- En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Soit  $f$  la fonction définie, sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = \frac{x+(1-x)e^{2x}}{2}$

On désigne par  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (unité graphique 2 cm.)

- a- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- b- Montrer que  $C_f$  admet une asymptote  $D$  que l'on déterminera.
- c- Etudier la position de  $C_f$  par rapport à  $D$ .
- d- Tracer  $C_f$  et  $D$ .

3) Calculer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par la courbe  $C_f$ , la droite  $D$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ .