2012/2013 — Lycée EL ALIA

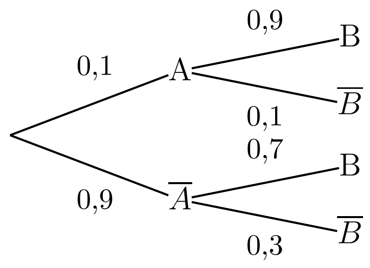
Devoir de synthèse n° 3

4° maths — **durée : 4 heures**

Exercice 1 *(3 points)*

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

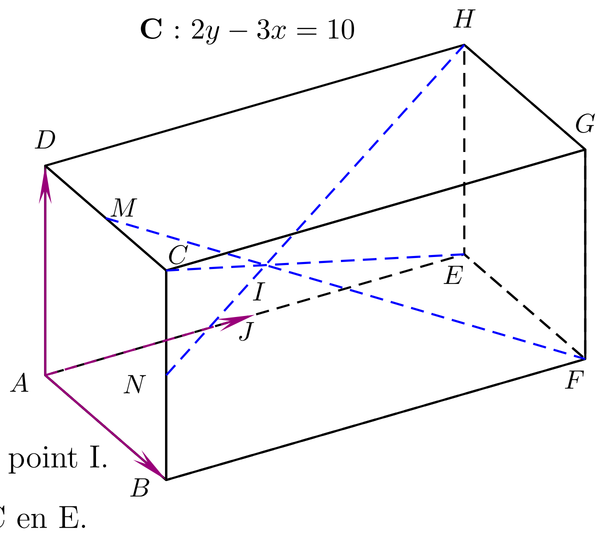
1. Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre :
   La probabilité de l'évènement $A \cup B$ est égale à :



   A : 0,82 **B** : 0,72 **C** : 0,73

2. Soit X une variable qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ,\ 2]$. Alors on a :
   A :$p(X = 0,5) = 0,25$ **B** :$p(0,5 \leqslant X \leqslant 0,8) = 0,3$ **C** : $p\left((0,2 \leqslant X \leqslant 0,7) \mid (X \geqslant 0.4)\right) = \frac{3}{16}$
3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 - 4x - 4 = 0$.
   La tangente à $\mathscr{P}$ au point $A(8, 6)$ a pour équation dans ce même repère :
   A : $3y - x = 10$ **B** : $2y - 9x = -60$ **C** : $2y - 3x = 10$

Exercice 2 *(6 points)*



Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un parallélépipède droit tels que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$.
On désigne par M le milieu du segment [DC].

1. Montrer que les droites (CE) et (FM) sont sécantes en un point I.
2. On désigne par h l'homothétie de centre I qui transforme C en E.
   (a) Déterminer les images des droites (CD) et (FM) par h. En déduire que $h(M) = F$.
   (b) Prouver que h est de rapport -2.
3. Soit J le milieu du segment [AE]. On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AJ},\ \overrightarrow{AD}\right)$.
   (a) Trouver une représentation paramétrique de chacune des droites (MF) et (CE).
   (b) Déduire que I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
   (c) Soit N$\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$. Montrer que $h(N) = H$.
4. Calculer le volume du tétraèdre IFEH. En déduire le volume du tétraèdre IMCN.
5. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z + \frac{8}{9} = 0$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

(b) Vérifier que $I \in \mathcal{S}$.

(c) Montrer que $\mathcal{S}$ est tangente au plan (ABC) en un point T que l'on précisera.

6. On pose $\mathcal{S}' = h(\mathcal{S})$. Montrer que $\mathcal{S}'$ est tangente au plan (EFH) en un point T' qu'l'on précisera.

Exercice 3 *(4 points)*

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination A, la destination G et la destination M.

– 50 % des clients choisissent la destination A ;
– 30 % des clients choisissent la destination G ;
– 20 % des clients choisissent la destination M.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction. Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80 % des clients ayant choisi la destination G. On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis. On note les évènements :

A : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A » ;
G : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G » ;
M : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M » ;
S : « le questionnaire est celui d'un client satisfait » ;
$\overline{\text{S}}$ « le questionnaire est celui d'un client insatisfait ».

1. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.
2. (a) L'enquête montre que 72 % des clients de l'agence sont satisfaits. Calculer $P(A \cap S)$.

   (b) En déduire $P(S \mid A)$.
3. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie.
   Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (*on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible*).
4. On prélève successivement au hasard **cinq** questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants.
   Calculer la probabilité de l'évènement : « au moins un questionnaire parmi les cinq est satisfait » (*on donnera le résultat arrondi au millième*).

Exercice 4 (*7 points*)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

A) On considère l'équation différentielle $(E) : y' + ny = x + \frac{1}{n}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).
2. Résoudre l'équation $(E') : y' + ny = 0$.
3. Montrer que la fonction h est solution de (E) si, et seulement si,la fonction $h - g$ est solution de (E').
4. En déduire les solutions de (E).

B) Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$

1. (a) Vérifier que f_n est la solution de (E) qui prend la valeur -1 en 0.
   (b) Etudier les variations de f_n.
2. (a) Montrer que l'équation, d'inconnue x, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n strictement positive.
   (b) Montrer que pour tout réel x positif, $e^x \geqslant x + 1$. En déduire le signe $f_n(1)$.
   (c) Prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n} < a_n < 1$.
3. (a) Vérifier que pour tout $n \geqslant 2$, $f_{n+1}(a_n) = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1}\left[n\left(e^{a_n} - 1\right) - 1\right]$.
   (b) Prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $f_{n+1}(a_n) > 0$.
   (c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante et convergente.
4. On note $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $a \leqslant a_n$ puis $a_n \leqslant ne^{-na}$.
   (b) En déduire que $a = 0$.