

SECTION :

Mathématiques

EPREUVE :

MATHEMATIQUES

DUREE : 4h

COEFFICIENT : 4

N.B : La qualité de la rédaction, la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions, constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie

➤ **Exercice 1 : (3points)**

Répondre par vrai ou Faux à chacune des propositions suivantes, en justifiant votre réponse

1. / Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2^n + 3^n \equiv 5^n \pmod{6}$

2. / $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$ si et seulement si $x \equiv 1[5]$

3. / Pour tout entier premier p strictement supérieur à 3, on a : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$

4. / Si $\begin{cases} x \equiv 4[5] \\ y \equiv 5[8] \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$; x et y deux entiers

➤ **Exercice 2 : (3points)**

Le tableau suivant indique le teneur de l'aire en dioxyde de carbone (CO_2) observé depuis le début de l'ère industrielle. la variable X désigne le rang de l'année et Y la teneur en CO_2

1. a. Représenter le nuage des points de cette série (X, Y)

Année	1850	1900	1950	1990
Rang X de l'année	0	50	100	140
Teneur en CO_2	275	290	315	350

b. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

c. En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la teneur en CO_2 pour l'année 2014.

2. La forme du nuage des points permet d'envisager un ajustement exponentiel, pour cela on pose $Z = \ln(Y - 250)$

a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Rang X de l'année	0	50	100	140
Z				

b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire

de la série (X, Z). Interpréter le résultat obtenu.

c. Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X

d. Selon ce modèle, quelle teneur en CO_2 peut-on estimer pour l'année 2014 ?



➤ **Exercice 3 : (5points)**

Soit n un entier naturel non nul. Soit f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x^n}$
 On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a- Etudier la dérivabilité de f_n en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
 b- Dresser le tableau de variation de f_n
 c- Etudier la position relative des courbes C_{n+1} et C_n . Tracer (C_1) et (C_2)
2. Soit a un réel de $]1, +\infty[$. Calculer une mesure de l'aire $I(a)$ de la partie du plan limitée par (C_1) et les droites : (O, \vec{i}) , $x = 1$ et $x = a$.

3. On pose
$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{\ln(1 + \frac{k}{2n})}}{k+2n}.$$

a- Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, on a :

$$\frac{1}{2n} f_1\left(1 + \frac{k}{2n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f_1(x) dx \leq \frac{1}{2n} f_1\left(1 + \frac{k+1}{2n}\right).$$

b- En déduire que : $S_n - \frac{1}{2n} f_1\left(\frac{3}{2}\right) \leq I\left(\frac{3}{2}\right) \leq S_n$ et que : $I\left(\frac{3}{2}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2n} f_1\left(\frac{3}{2}\right)$.

c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

➤ **Exercice 4 : (5points)**

Soit f la fonction définie sur $I =]-\ln 2, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^x - 1}}$.

(C_f) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a- Dresser le tableau de variation de f .
 b- Préciser l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
 c- Tracer (T) et (C_f) .
2. Soit g la fonction définie sur $]0, \pi[$ par : $g(x) = g(x) = -\ln(1 + \cos x)$
 a- Montrer que g réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur I .
 b- Soit $h = g^{-1}$. Montrer que h est dérivable sur I et que $h'(x) = f$.
 c- Calculer alors l'air de la partie du plan limitée par (C_f) et les droites d'équations $x = 0$; $y = 0$ et $x = \ln 2$.
3. Soit (E) l'ensemble des fonctions dérivables, strictement positives sur les intervalles de la forme : $D =]a, +\infty[$; $a \in \mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle : $y + y^3 = -2y'$
 a- Vérifier que f appartient à (E) .
 b- On pose $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$ avec $y \in (E)$. Montrer que z est dérivable sur D et que $z'(x) = z(x) + 1$.
 c- Montrer alors qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y(x) = \frac{1}{\sqrt{k e^x - 1}}$; $x \in]-\ln k, +\infty[$.



➤ **Exercice 5 : (4points)**

I-Dans une usine qui fabrique des ampoules électrique on considère un lot contenant 7 ampoules réparties comme suit :

- 4 ampoules de 100 volts dont 3 qui émettent une lumière blanche et une qui émet une lumière rouge.
- 3 ampoules de 75 volts dont 1 qui émet une lumière blanche et 2 qui émettent une lumière rouge.

Un client veut acheter trois ampoules .Il les choisie au hasard et simultanément du lot .
Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre d'ampoules qui émettent une lumière blanche.

- 1- Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$
- 2- Calculer la probabilité que le client obtient 3 ampoules de même ampérage sachant qu'elles émettent toutes en blancs.

II-On estime qu'une ampoule a une durée de vie moyenne de 300jours. On suppose que la variable T qui représente la durée de vie d'une ampoule suit une loi exponentielle de paramètre λ et on admet que l'espérance mathématiques de T est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

On choisit une ampoule au hasard

- 1- Déterminer λ .
- 2- Calculer la probabilité que l'ampoule ne soit pas grillée au bout d'une année.
- 3- Sachant que l'ampoule n'est pas grillée au bout d'une année, qu'elle est la probabilité qu'elle n'est pas encore grillée au bout de deux ans.

Bonne Chance et Bonne Révision

