REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION Lycée Ibn Khaldoun Jammel- Monastir		Mr : Afli Ahmed Devoir de Synthèse n°3	
SECTION :	Mathématiques		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4h	COEFFICIENT : 4

N.B : La qualité de la rédaction, la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions, constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 : (3points)

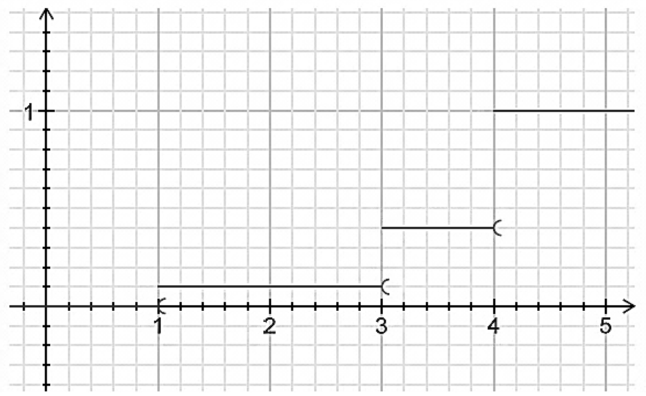
A. Pour chacune des question suivantes, une seule réponse est juste.noter sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondent à la bonne réponse

1.) La courbe ci-contre est celle de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X alors:

a p(X= 4) = $\frac{1}{10}$

b p(X= 4) = $\frac{3}{10}$

c p(X= 4) = $\frac{2}{5}$



2.) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et 0,75 ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$)
Alors $p(X > 1) =$

a $1 - (0{,}75)^n$ b $(0{,}75)^n$ c $1 - (0{,}25)^n$

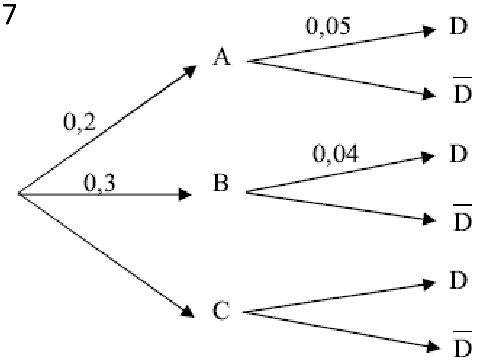
3.) La durée de vie d'un appareil électronique, exprimée en année, jusqu'à ce que survienne la première panne, est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
La valeur de t pour laquelle on a : **P($X \leq t$) = P($X > t$)** est :

a $t = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ b $t = \frac{\lambda}{\ln(2)}$ c $t = \frac{\lambda}{2}$

B.4.) On donne l'arbre de probabilités suivant tel que p(D) = 0,27

i.) Calculer p(D∩A) , p(D∩B) puis déduire p(D∩C)

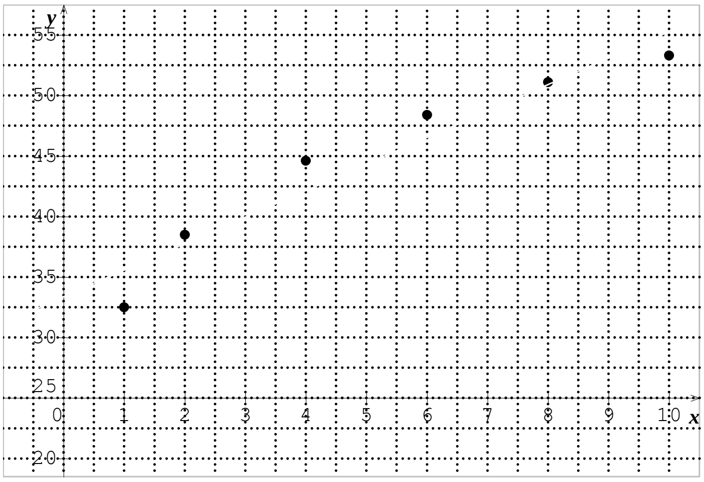
ii.) Déterminer p(C/D).



Exercice n°2 : (3points)

Pour des raisons pratiques, la production mensuelle du groupe chimique de l'un des produits qu'il commercialise ne doit pas excéder 10 tonnes.
Le groupe a relevé le coût total de production mensuelle en milles de dinars, noté y en fonction de la production x en tonnes. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

x	1	2	4	6	8	10
y	32.5	38.5	44.6	48.4	51.1	53.3



1) On a représenté ci-contre le nuage de points de la série (X , Y).
Indiquer si ce nuage justifie la recherche d'un ajustement affine entre X et Y.

2)a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X.

b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y.

3) On pose $z = e^{0,1y}$

a. Compléter le tableau suivant après l'avoir recopié sur votre copie:

x	1	2	4	6	8	10
z	25.79	46.99				

b. Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X.

c. Expliquer pourquoi cet ajustement semble justifié.

d. Estimer le coût correspondant à une production de 7 tonnes.

Exercice n°3 : (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O , \vec{i} , \vec{j})$.

1) On considère la courbe (E) d'équation :$x^2 + 4y^2 = 1$.

a. Vérifier que (E) est une ellipse dont on déterminera le centre, les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité.

b. Tracer (E) .

2) Soient les droites (D) et (D') d'équations respectives $x = 1$ et $x = -1$ et le point $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

a. Vérifier que pour tout θ de $]0, \pi[$, le point M_0 de coordonnées ($\cos\theta$, $\frac{1}{2}\sin\theta$) est un point de (E) et qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (E) en M_0 est : $x\cos\theta + 2\,y\,\sin\theta - 1 = 0$.

b. La tangente (T) coupe les droites (D) et (D') respectivement en K et K'. Calculer $\overrightarrow{FK} . \overrightarrow{FK'}$.
En déduire que le triangle KFK' est rectangle.

Exercice n°4 : (4points)

1) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : 91x + 10y = 1

a. Justifier l'existence d'une solution de (E).

b. Déterminer une solution particulière de (E).

c. Résoudre alors l'équation (E') : 91x + 10y = 412

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

3) Soit l'équation (E'') : $A_3x + A_2y = 3296$

a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E'').

b. Montrer que (E'') admet une unique solution d'entiers naturels que l'on précisera.

Exercice n°5 : (6points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{2x})$

1) soit $g(t) = \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t)$ definie sur [0,1]

Dresser le tableau de variation de g. En déduire que $g(t) > 0 \ \forall\, t \in]0,1]$

2) a. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0]$ et que $\forall\, x \in]-\infty, 0]$ $f'(x) = e^{-x}g(e^{2x})$

b. Dresser alors le tableau de variation de f puis construire C_f

3) a. Montrer que la fonction u définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par u(x)= tan(x) est une bijection.

b. calculer $u^{-1}(0)$; $u^{-1}(1)$ et $u^{-1}(\sqrt{3})$

c. Montrer que u^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(u^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

d. Soit H(x) = $\int_0^{-\ln x} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt$, $x \in]0, +\infty[$.

i.) Montrer que H est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer H'(x).

ii) En déduire que $H(x) = -u^{-1}(x) + \frac{\pi}{4}$ pour tout $x > 0$

4) a. Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0]$ $f'(x) = -f(x) + \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$

b. Calculer l'aire du domaine du plan limité par C_f et les droites d'équations respectives

$x = -\ln\sqrt{3}$, $x = 0$ et $y = 0$

Vers la victoire finale