

SECTION :

Mathématiques

EPREUVE :

MATHEMATIQUES

DUREE : 4h

COEFFICIENT : 4

N.B : La qualité de la rédaction, la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions, constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie

❖ **Exercice n°1:(3 points)**

Pour chacune des questions suivantes une seule des propositions est vraie.

Recopier le numéro et la lettre correspondante à la réponse juste.

Aucune justification n'est demandée.

1.) Pour une loi exponentielle de paramètre λ , la densité de probabilité est une solution de l'équation différentielle :

(a) $Y'' + \lambda^2 Y = 0$

(b) $y' - \lambda y = 0$

(c) $y' + \lambda y = 0$

2.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$ (a) 1 (b) e (c) $+\infty$

3.) Pour $x \geq 1$ on a : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x e^{t^2} dt}{x-1} =$ (a) $+\infty$ (b) e (c) 1

4.) Le nombre de solution, dans \mathbb{Z} , de l'équation $x^2 \equiv 2[4]$ est :

(a) 0

(b) 1

(c) 2

5.) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et 0,75, ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$).

Alors $P(X \geq 1) =$

(a) $1 - (0,75)^n$

(b) $(0,75)^n$

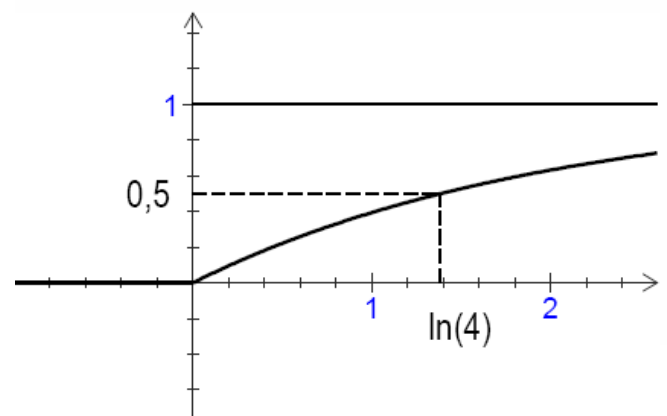
(c) $1 - (0,25)^n$

6.) La courbe ci-contre est celle de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle alors $P(X \geq 10) =$

(a) $\frac{1}{e}$

(b) $\frac{1}{e^5}$

(c) $\frac{1}{e^{10}}$

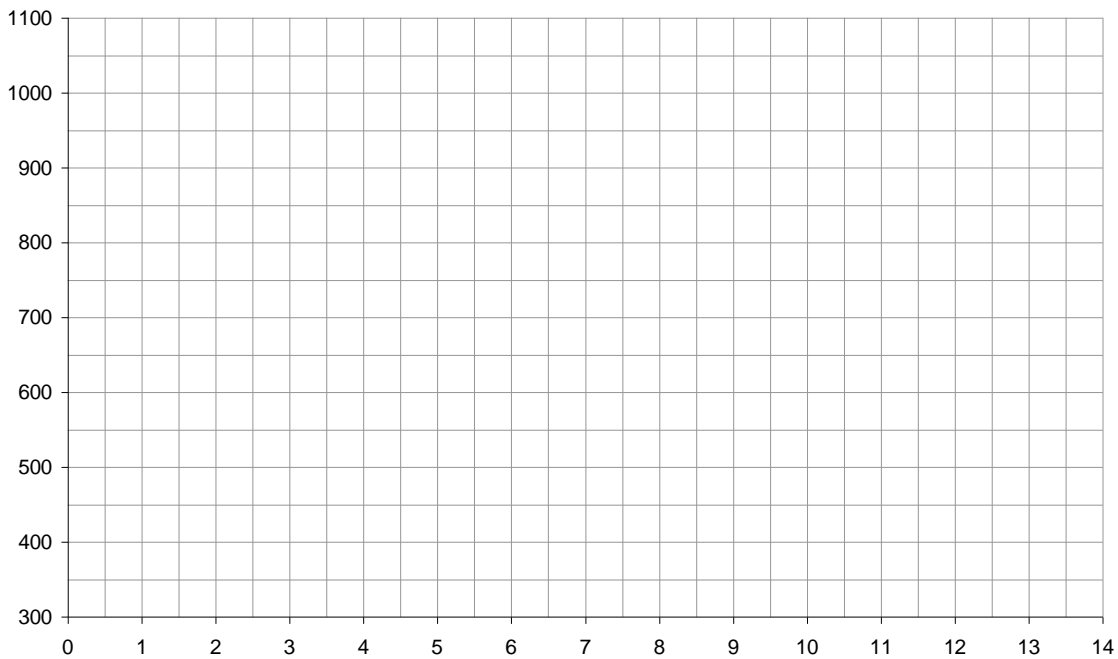


❖ **Exercice n°2: (3 points)**

Le tableau suivant donne la moyenne mensuelle du cours du blé à Chicago exprimé en cents/boisseau de janvier à décembre 2007.

Rang x_i du mois	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Moyenne mensuelle du cours y_i (cents/boisseau)	466,1	464,7	459,5	471,2	486	573,5	613,3	691,8	863	853,7	791,7	916,7

1.)a. Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i; y_i)$ dans le repère orthogonal ci-dessous (unités graphiques : 1 cm pour un mois en abscisse et 1 cm pour 100 cents en ordonnée).



b. Donner l'équation de la droite D d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les résultats seront donnés à 10^{-3} près. Tracer la droite D dans le repère précédent.

2.) La forme du nuage de points permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $z_i = \ln y_i$.

a. Compléter le tableau suivant (les valeurs de z_i seront arrondies à 10^{-3} .)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	466,1	464,7	459,5	471,2	486	573,5	613,3	691,8	863	853,7	791,7	916,7
$z_i = \ln y_i$	6,144	6,141	6,13									

a. L'équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés

est $z = 0,0725x + 5,951$.

En déduire l'expression de y en fonction de x de la forme $y = \alpha e^{\beta x}$ avec α arrondi au centième.

3.) La moyenne du cours du blé pour le mois de février 2008 était de 1059 cents/boisseau.

Lequel de ces deux ajustements semble le plus proche de la réalité ?



❖ **Exercice n°3: (4 points)**

1.) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation : $7x - 13y = 2$ (E)

- Montrer que si (x, y) est solution de (E) alors $x \equiv 4[13]$
- Résoudre alors l'équation (E).

2.) Résoudre, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation : $7x - 13y = -4$ (E').

Soit dans \mathbb{Z} le système (S) :
$$\begin{cases} n \equiv 5[13] \\ n \equiv 3[7] \end{cases}$$

3.) Montrer qu'un entier n est solution de (S) si et seulement si $n \equiv 31(\text{mod}91)$

4.) Pour tout entier n , on pose $a = 13n - 8$ et $b = 7n - 4$

- Montrer que le couple (a, b) est une solution de l'équation (E'). En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$.
- Déterminer l'ensemble des entiers n pour les quels $a \wedge b = 2$.

❖ **Exercice n°4: (4 points)**

Une usine fabrique des appareils, un contrôle de qualité a montré que :

- 14% des appareils présentent un défaut D_1
- 10% présente le défaut D_2
- 4% présentent les deux défauts D_1 et D_2 .

Un appareil est défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

On note D_1 : « l'appareil présente le défaut D_1 » : D_2 : « l'appareil présente le défaut D_2 »

1.) Les événements D_1 et D_2 sont-ils indépendants ?

2.) Sachant que l'appareil présente le défaut D_1 , calculer la probabilité pour qu'il présente le défaut D_2 .

3.) Montrer que la probabilité de l'événement D : « l'appareil est défectueux » est égale à $\frac{1}{5}$

4.) Un commerçant reçoit n appareils indépendants, $n \geq 2$ pour l'exposer l'un à coté de l'autre.

Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre d'appareils défectueux.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
- Le commerçant veut que sur sa commande, la probabilité p_n d'avoir au moins un appareil défectueux reste inférieur à 50%, déterminer la maximale de n .

5.) La durée de vie d'un appareil défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 3 \cdot 10^{-2}$

Et la durée de vie en année d'un appareil non défectueux suit la loi exponentielle de paramètre

$$\lambda_2 = 10^{-5}.$$

On achète un appareil au hasard, on désigne par Y la variable aléatoire qui indique sa durée de vie en année.

a. Montrer que pour $t \in [0, +\infty[$ on a : $P(Y \geq t) = \frac{1}{5}e^{-\lambda_1 t} + \frac{4}{5}e^{-\lambda_2 t}$.

b. Calculer la probabilité que l'appareil ne tombe pas en panne au bout de 5 ans.

c. Sachant que l'appareil acheté dépasse 5 ans, quelle est la probabilité qu'il soit défectueux.



❖ **Exercice n°5: (6 points)**

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$

et on cherche l'ensemble des solutions, définies sur $]0; +\infty[$, de cette équation.

1. a. Démontrer que la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par : $u(x) = \frac{e^x}{x}$ est solution de (E) .

b. Démontrer qu'une fonction g définie sur $]0; +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si, la fonction $g - u$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y - y' = 0$.

c. En déduire toutes les solutions définies sur $]0; +\infty[$ de l'équation (E) .

2.) Pour tout réel k non nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_k(x) = \frac{kx+1}{x} e^x$.

a. Déterminer selon les valeurs de k la limite de f_k en $+\infty$.

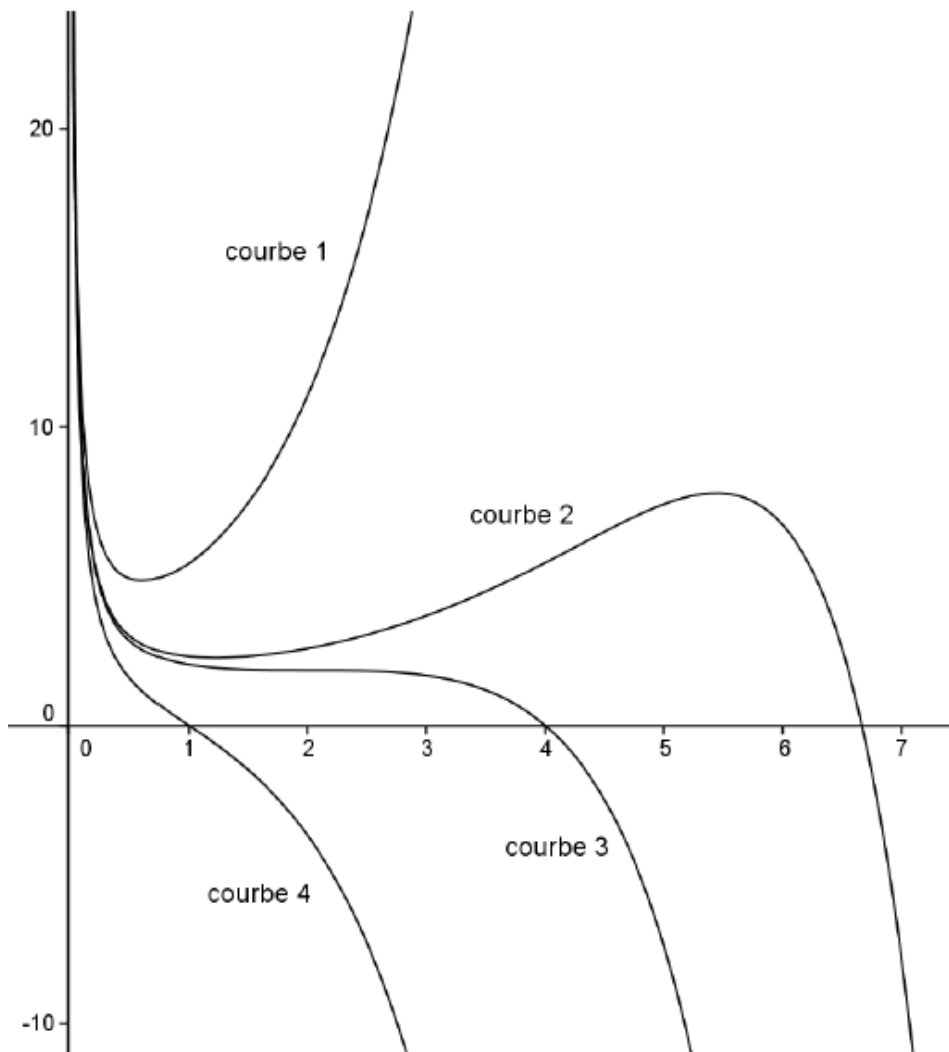
b. Déterminer la limite de f_k en 0.

c. Prouver que la dérivée de f_k est définie par $f'_k(x) = (kx^2 + x - 1) \frac{e^x}{x^2}$.

d. Déterminer suivant les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $f'_k(x) = 0$.

e. On a tracé sur le graphique ci-dessous les courbes des fonctions f_1 , f_{-1} , $f_{-0,25}$ et $f_{-0,15}$.

Attribuer à chaque fonction sa courbe : les réponses devront être justifiées.



Annexe à rendre avec la copie

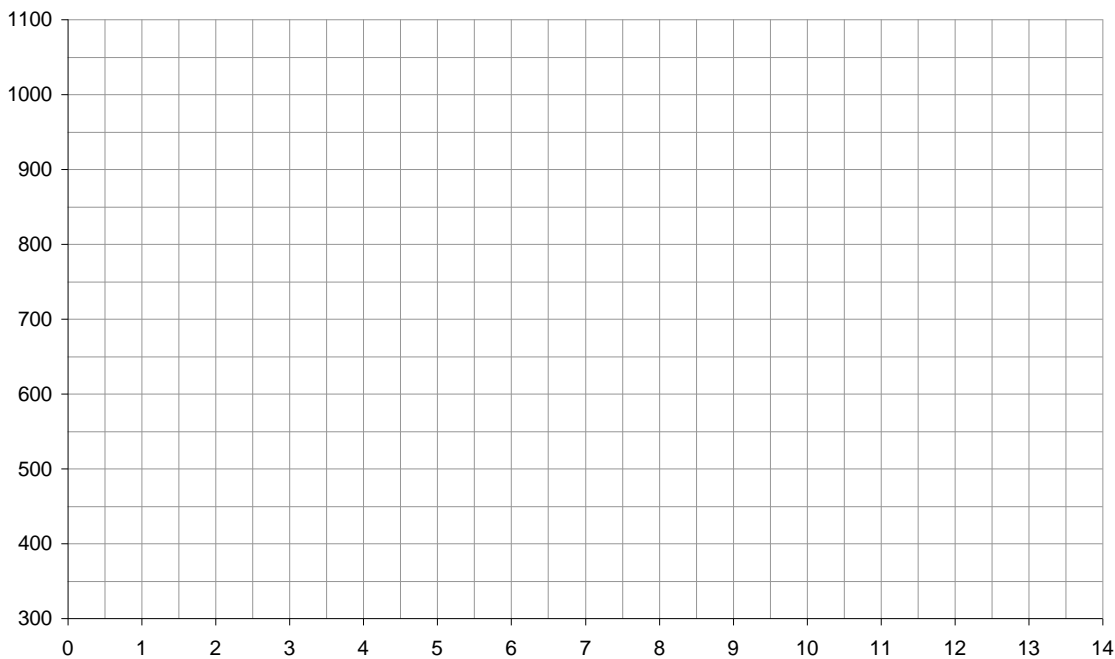
Nom et prénom :4M

❖ **Exercice 1 :**

Questions	1	2	3	4	5	6
Réponses						

❖ **Exercice 2 :**

Question 1.)a.



Question 2.)a.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	466,1	464,7	459,5	471,2	486	573,5	613,3	691,8	863	853,7	791,7	916,7
$z_i = \ln y_i$	6,144	6,141	6,13