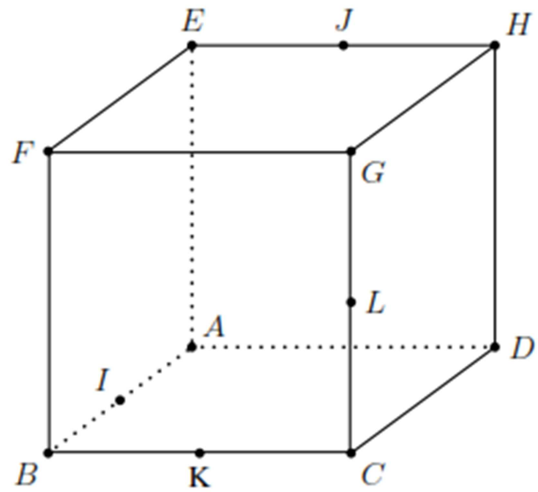
L. Regueb	Mathématiques	Classe : $4^{ème}$M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir Final	Le:05/05/2016 D:4h

Exercice1(5pts)



ABCDEFGH est un cube .

I est le milieu du segment $[AB]$,

J est le milieu du segment $[EH]$,

K est le milieu du segment $[BC]$

et L est le milieu du segment $[CG]$.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

1)a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK)

b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK)

2) Déterminer une représentation paramétrique la droite (FD)

3) Déterminer les coordonnées du point Ω ,intersection de la droite (FD) et du plan (IJK) .

4)a) Déterminer la nature du triangle (IJK) et calculer son aire .

b) Calculer le volume du tétraèdre $FIJK$.

5) Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Exercice2(4pts)

Soit dans, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $(E): 17x - 11y = 1$.

1)a) Résoudre dans, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E) .

b) Résoudre en suite dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $(E'): 17x - 11y = 2$.

2) Montrer qu'il existe un seul entier x_0 tel que $0 \leq x_0 < 11$ vérifiant $17x_0 \equiv 1\ [11]$ et déterminer sa valeur .

3) Soient x , y et a trois entiers tels que $x = 17a - 2$ et $y = 3a - 1$.

a) Calculer $3x - 17y$ et en déduire les valeurs possibles de $d = pgcd(x, y)$.

b) Déterminer les valeurs de x pour $d = 11$.

Exercice3(5pts)

Un constructeur automobile achète des pneus à 3 fournisseurs dans les proportions suivantes :

20% au premier fournisseur , 50% au deuxième fournisseur et 30% au troisième fournisseur .

Le premier fournisseur fabrique 90% de pneus sans défaut , le second fournisseur fabrique 95% de pneus sans défaut et le troisième fabrique 80% de pneus sans défaut .

Tous les résultats seront donnés à 10^{-3} près .

1) On choisit un pneu au hasard dans la livraison .

a) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation .

b) Déterminer la probabilité que le pneu soit sans défaut .

c) Le pneu choisi étant sans défaut , qu'elle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur .

2) On considère un lot de 20 pneus .

a) Déterminer le nombre moyen de pneus défectueux .

b) Déterminer la probabilité qu'un pneu au plus soit défectueux .

3) La durée de vie en km d'un pneu est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre 2.10^{-5} .

a) Quelle est la densité de probabilité de cette loi .

b) Quelle est la probabilité qu'un pneu dure moins de 50 000 km ?

c) Quelle est la probabilité qu'un pneu dure plus que 100 000 km ?

Exercice4(6pts)

Soit f la fonction définie sur [0 , +∞[par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x} e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

b) Dresser le tableau des variations de f .

c) Montrer que f possède une fonction réciproque f^{-1} définie et continue sur un intervalle que l'on précisera .

d) Tracer (C) et (C') où (C') est la courbe représentative de f^{-1} .

(on pourra préciser en particulier la demi tangente à (C') à l'origine) .

2) x étant un réel tel que $0 < x \leq 1$.

a) Calculer l'intégrale $G(x) = \int_x^1 tf'(t)dt$.

On pourra chercher une primitive sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ de la fonction $t \longmapsto tf'(t)$.

b) On pose $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$. Exprimer $F(x) + G(x)$ à l'aide de x .

c) Déduire l'expression de $F(x)$ à l'aide de x .

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C) et (C') et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$.

4) n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une solution unique α_n dans l'intervalle $]0\,,+\infty[$.

b) Montrer que la suite (α_n) est décroissante puis qu'elle est convergente .

c) calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n \ln(n) = 1$.