

Lycée Tahar Sfar Mahdia	<i>Devoir de synthèse n° 3</i> Mathématiques	Niveau : 4 ^{ème} Math
Date : 11 / 05 / 2017	Profs : SAIDI . A & MEDDEB . T	Durée : 4 heures

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (4 pts)

Le tableau ci-dessous indique le nombre annuel exprimé en milliers de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation par une entreprise.

Année	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	81,3	92,3	109,7	128,5	131,2

Les résultats seront donnés arrondis à 10^{-3} près.

- A/** 1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal.
- 2) a/ Calculer le coefficient de corrélation r de cette série, un ajustement affine est-il fiable? Si oui déterminer l'équation de la droite de régression de y en x .
- b/ Donner une estimation du nombre de véhicules vendus en 2016.
- 3) Le tableau ci-dessous indique le nombre annuel exprimé en milliers de véhicules vendus de l'année 2012 jusqu'à l'année 2016.

Année	2012	2013	2014	2015	2016
Rang de l'année : x_i	4	5	6	7	8
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	131,2	110,8	101,4	86,3	76,1

- a/ Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs.
- b/ L'ajustement précédent est-il encore adapté? Justifier la réponse.
- 4) Les experts décident d'ajuster le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ pour i entier variant de 4 à 8 par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points pour cela on pose $z = \ln y$.
- a/ Déterminer une équation de la droite de régression de z en x , en déduire l'expression de y en fonction de x .
- b/ L'entreprise décide d'arrêter la fabrication de ce modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur à 65000. En quelle année l'entreprise doit-elle prévoir cet arrêt?

B/ Un véhicule vendu par cette entreprise est garanti un an et sa durée de vie exprimée en années Jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

- 1) Déterminer la valeur de λ à 10^{-2} près sachant que la probabilité que le véhicule ne tombe pas en panne pendant la période de sa garantie est égale à 0,9.
- 2) Le véhicule n'est pas tombé en panne pendant la période de garantie, Déterminer la probabilité qu'il ne connaisse pas de pannes au cours des 3 années suivantes.

Exercice n°2 : (4 pts)

La gendarmerie nationale essaie un nouvel alcootest. Une caractéristique de cet alcootest est que : 96% des individus ivres sont déclarés positifs par ce test.

Une étude statistique montre que :

- Parmi les automobilistes contrôlés, il ya 2% de personnes ivres.
- Le test est positif dans 2,9% des cas.

On note T l'événement : « le test de la personne contrôlée est positif ».

On note I l'événement : « la personne testée est ivre ».

- 1) En utilisant les événements T et I , traduire en langage de probabilités les pourcentages ci-dessus.
- 2) Un gendarme contrôle un automobiliste au hasard. Calculer la probabilité que cet automobiliste soit :
 - a/ Ivre et contrôlé positif.
 - b/ Sobre et contrôlé positif.
- 3) Calculer la probabilité que cet automobiliste soit ivre sachant qu'il est contrôlé positif.
- 4) Un contrôle coûte à l'état 4 dinars. Si le test est positif, cela donne lieu à un procès-verbal, puis au paiement d'une amende de 200 dinars. Bien entendu, un test négatif donne lieu à un acquittement. Calculer l'espérance de gain par contrôle pour l'état dans les conditions de ce test.
- 5) On interroge indépendamment 50 automobilistes qui ont assisté à ce contrôle.
 - a/ Calculer la probabilité qu'au moins un d'eux soit contrôlé positif.
 - b/ Déterminer le nombre moyen d'automobilistes contrôlés positifs.

Exercice n°3 : (8 pts)

A – Soit f la fonction définie sur $]-\ln 2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^x - 1}}$.

On désigne par \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a/ Montrer que pour tout $x \in]-\ln 2 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-e^x}{(2e^x - 1)\sqrt{2e^x - 1}}$.

b/ Etablir le tableau de variations de f . Préciser $f(0)$.

c/ Construire \mathcal{C}_f .

2) Soit g la fonction définie sur $[0 ; \pi[$ par : $g(x) = -\ln(1 + \cos x)$.

a/ Montrer que g est une bijection de $[0 ; \pi[$ sur $]-\ln 2 ; +\infty[$.

b/ On note $\varphi = g^{-1}$. Montrer que φ est dérivable sur $]-\ln 2 ; +\infty[$ et que $\varphi'(x) = f(x)$.

B – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit F_n la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n dt$.

1) a/ Montrer que $F_1(x) = \varphi(x) - \frac{\pi}{2}$.

b/ On désigne par \mathcal{A} l'aire de la région du plan limitée par \mathcal{C}_f , l'axe (O, \vec{i}) et les droites

d'équations : $x=0$ et $x=\ln 2$. Montrer que : $\mathcal{A} = \frac{\pi}{6}$.

c/ Vérifier que, pour tout réel $t \geq 0$, on a : $\frac{1}{2e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{2 - e^{-t}}$, puis expliciter $F_2(x)$.

2) On admet que F_n admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, et on note $L_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$.

a/ Calculer L_1 et L_2 .

b/ En remarquant que, pour tout réel $t \geq 0$, on a : $0 \leq f(t) \leq 1$, montrer que $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$.

c/ En déduire que la suite (L_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

3) a/ Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) + [f(t)]^3 = -2f'(t)$.

b/ En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) + F_{n+2}(x) = \frac{2}{n} [1 - (f(x))^n]$.

c/ Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n + L_{n+2} = \frac{2}{n}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$.

4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (-1)^n L_{2n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = U_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

b/ En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$.

Exercice n°4 : (4 pts)

1) On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation $(E): 9x + 5y = 1$.

a/ Montrer que si $(x ; y)$ est solution de (E) , alors $x^2 \equiv 1 \pmod{5}$.

b/ Donner une solution particulière de (E) , puis résoudre l'équation (E) .

c/ En déduire les solutions du système $(S): \begin{cases} 9x + 5y = 1 \\ x \equiv y \pmod{3} \end{cases}$.

2) Soit N un entier tel qu'il existe un couple d'entiers $(a ; b)$ vérifiant : $\begin{cases} N = 9a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$.

a/ Montrer que le couple $(a ; -b)$ est solution de (E) .

b/ Pour tout entier m , montrer l'équivalence:

$$\begin{cases} m \equiv 1 \pmod{9} \\ m \equiv 2 \pmod{5} \end{cases} \text{ si, et seulement si } m \equiv 37 \pmod{45}.$$

c/ Trouver alors le reste de la division euclidienne de N par 45.

3) Pour rembourser les frais mensuels de transport à ses employés (cadres et ouvriers), une entreprise a dépensé une somme de 1000 dinars.

Sachant que les cadres ont reçus 90 dinars chacun et les ouvriers 50 dinars chacun.

Combien pouvait-il y avoir de cadres et d'ouvriers dans cette entreprise ?

Bon courage