Mathématiques *Lycées Thélepte+Feriana* *Fevrier 2014*	**Devoir de contrôle n°2** *4ème Maths*	*Durée : 3 heures* *Profs: Mhamdi Mongi* *Mhamdi Abderrazek*

EXERCICE N°1:

Cocher la réponse exacte. On ne demande aucune justification

1°) La composée d'une similitude indirecte et d'un déplacement est :

a) une similitude indirecte **b)** déplacement **c)** translation

2°) Soit $F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \sqrt{t-1}\,dt$ alors F est dérivable sur

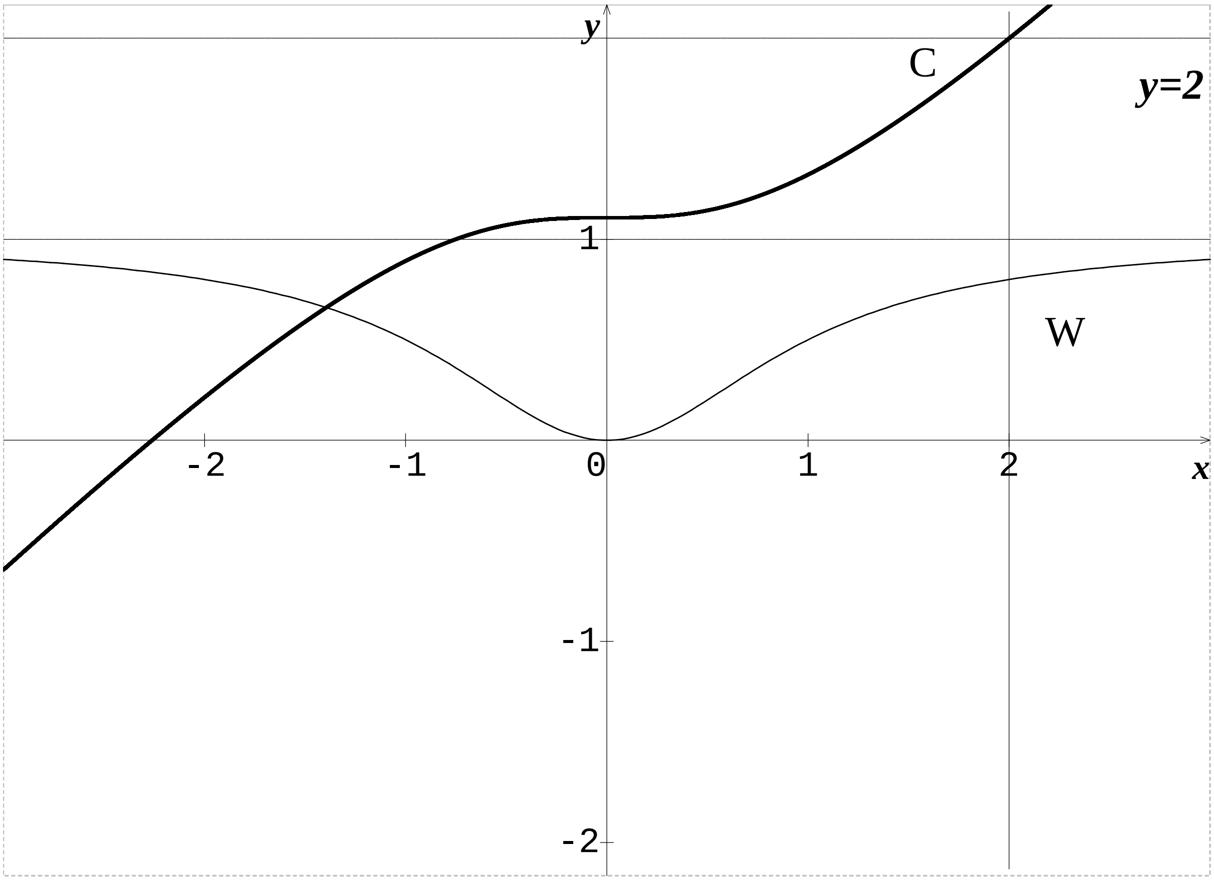
a) $[1,+\infty[$ **b)** $]0,1]$ **c)** $]-\infty,-1]$

3°) soit f une fonction définie sur IR .On donne dans le graphique ci-dessous les courbes représentatives (W) de la fonction f^2 et (C)d'une primitive de f^2

et soit l'arc $\widehat{OE} = \{M(x,y)\ tel\ que : y = f(x)\ et\ 0 \leq x \leq 2\}$

Le volume V du solide de révolution de $\widehat{OE}$ par rapport à l'axe des abscisses vérifie

a) $V = \pi$ **b)** $V > \pi$ **c)** $V < \pi$



4°) Une similitude directe qui fixe deux points distincts est :

a) symétrie orthogonale **b)** translation **c)** identité

5°) Si f est une similitude indirecte de rapport 2 et de centre A et g une similitude directe de rapport 2 de centre A alors fog^{-1} est

a) un déplacement **b)** une symétrie glissante **c)** une symétrie axiale

6) L'application f qui à tout point M d'affixe z associe le pont M' d'affixe $z' = 2i\bar{z} - 3$ est une similitude indirecte de rapport 2 de centre A d'affixe $(1 + 2i)$ et d'axe

a) $\Delta: x + y + 1 = 0$ **b)** $\Delta: x - y + 1 = 0$ **c)** $\Delta: x + y - 1 = 0$

EXERCICE N°2:

Soit F la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x)=\int_0^{\sqrt{\tan x}}\frac{t}{1+t^4}dt$

1) Montrer que F est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer F'(x)

2) Calculer F(0) ; exprimer $F(x)$ en fonction de x

3) Déduire alors la valeur de $I=\int_0^1\frac{t}{1+t^4}dt$

EXERCICE N°3:

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle rectangle tel que :$AC=4$; $AB=2$ et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par Ω le projeté orthogonal de A sur (BC)

1°) Soit f la similitude directe qui transforme A en C et B en A

a) Déterminer l'angle et le rapport de f

b) Montrer que Ω est le centre de f

c) On désigne par E le symétrique de Ω par rapport à (AB)

et par F le symétrique de Ω par rapport à (AC)

Montrer que A est le milieu de [EF] et que $f(E)=F$

2°) Soit g la similitude indirecte qui transforme E en Ω et Ω en F

a) Déterminer le rapport de g .Soit ɯ le centre de g

b) Déterminer $g°g(E)$ et en déduire que ɯ $\in(EF)$

3°)a) Déterminer $g°f^{-1}(\Omega)$ et $g°f^{-1}(F)$ et montrer que $g°f^{-1}=S_{(AC)}$

b) Déterminer alors $g(A)$ et $g(B)$.En déduire que ɯ $\in(BC)$

c) Construire alors ɯ et l'axe Δ de g

4°) On rapporte le plan orienté au repère orthonormé $(A,\vec{i},\vec{j})$

Tel que : $\vec{i}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ $et\ \vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

a) Préciser l'affixe de chacun des points A, B et C

b) Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z'.

Montrer que $f(M)=M'\Leftrightarrow z'=2iz+4$

c) Montrer que $g(M)=M'\Leftrightarrow z'=-2i\bar{z}+4$

d) Déterminer les affixes de ɯ, Ω et une équation de Δ

EXERCICE N°4:

1°) Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ $par : f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.Interpréter

b) Dresser le tableau des variations de f

c)Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,+\infty[$

d) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

e)Tracer C_f ainsi que la courbe de f^{-1}

2°) Soit **A** l'aire de la partie du plan limitée par C_f et les droites

D'équations : $x = 0$ $et\, y = 1$. Montrer que **A**$=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$

3°) On considère la suite U définie sur IN par : $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$

a) Montrer que U est décroissante

b) Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$

c) Déterminer la limite de U

4°) On considère la suite v définie par :$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

a)Montrer que : pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$1 - t^2 + t^4 + \cdots\cdots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

b) En passant à l'intégrale, montrer alors que pour tout $n \in IN$

on a $v_n - I = (-1)^n U_n$

c) Montrer que : $|v_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$

d) Calculer v_3 et donner une valeur approchée de I

4°) Soit φ une fonction continue sur IR .On considère la fonction F définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x) = \varphi(\tan x)$

b) Déterminer $F(x)$ pour chacun des cas suivants :

* $\varphi(t) = 1$ ** $\varphi(t) = t^2$

c)En déduire que $I = \frac{\pi}{4}$ et déterminer la valeur de A

EXERCICE N°5:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ dans l'annexe on donne sa courbe représentative Γ et ses asymptotes horizontales d'équations : $y=1$ et $y=-1$

1°) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par : Γ , l'axe des abscisses , les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$

2°) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à déterminer

3°) Tracer la courbe de f^{-1} fonction réciproque de f

4°) Soit h la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x)=2\tan x-1$

a) Montrer que h réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ $sur\ IR$

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur IR et que : $(h^{-1})'(x)=\frac{2}{x^2+2x+5}$

5°) Soit l'arc $C=\left\{M(x,y)\ tel\ que : y=f(x)\ \ et\ \ \frac{2}{\sqrt{3}}-1\leq x\leq 2\sqrt{3}-1\right\}$

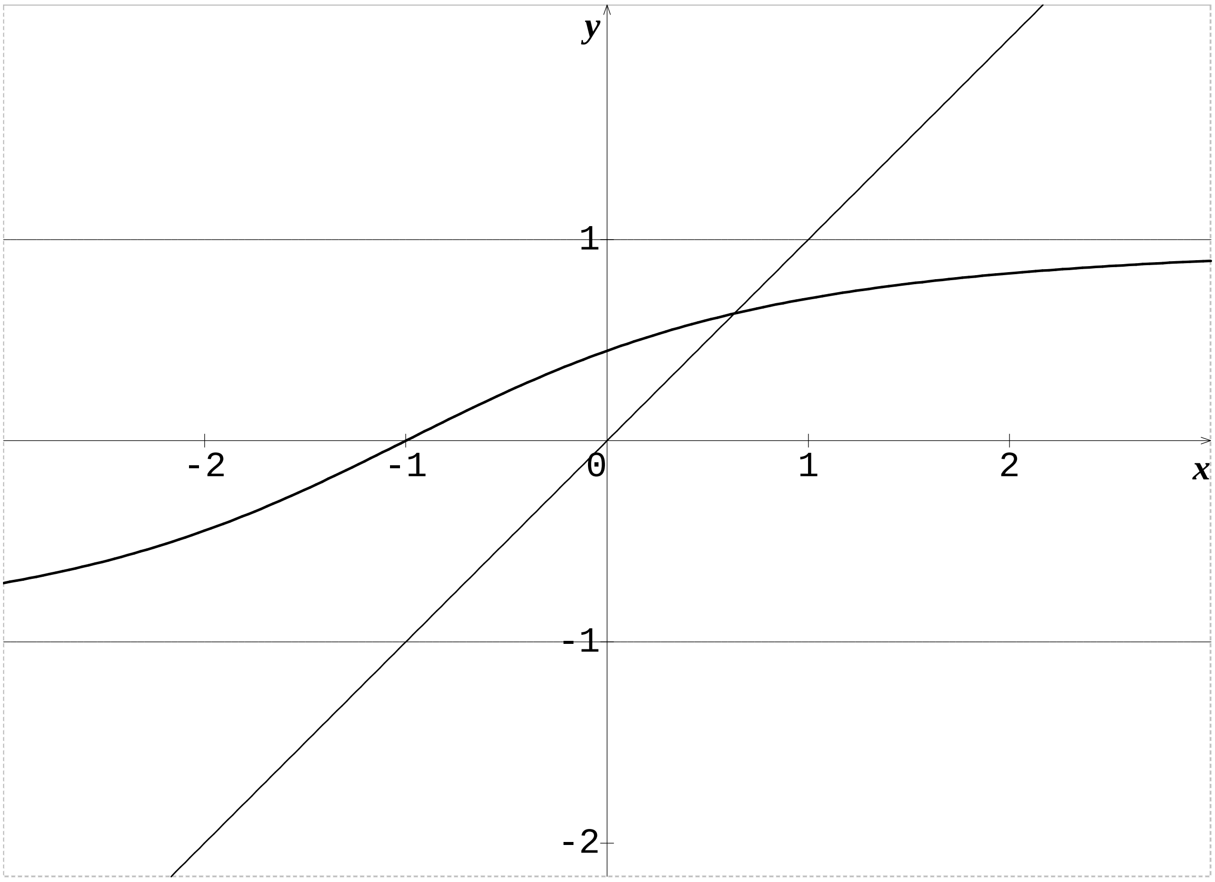
a)Déterminer a et b tel que : $h(a)=\frac{2}{\sqrt{3}}-1$ et $h(b)=2\sqrt{3}-1$

b) Vérifier que : $f^2(x)=1-2(h^{-1})'(x)$

c)Déterminer alors le volume du solide de révolution de C par rapport à l'axe des abscisses

BON TRAVAIL

FEUILLE A RENDRE :



CORRECTION DU DEVOIR DE CONTROLE N°2

EXERCICE N°1 :

1	2	3	4	5	6
a	b	c	c	c	c

EXERCICE N°2 :

1°) La fonction : $t \to \frac{t}{1+t^4}$ est une fonction rationnelle continue sur $[0,+\infty[$ et soit $U: x \to U(x) = \sqrt{\tan x}$; $x \to \tan x$ est dérivable strictement positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $U'(x) = \frac{1+(\tan x)^2}{2\sqrt{\tan x}} > 0$ alors $U\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{0^+} U\,;\, \lim_{\frac{\pi}{2}^-} U\right[=]0,+\infty[\subset [0,+\infty[$ de plus $0 \in [0,+\infty[$ alors

F est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $F'(x) = \frac{1+(\tan x)^2}{2\sqrt{\tan x}} \frac{\sqrt{\tan x}}{1+\sqrt{\tan x}^4} = \frac{1}{2}$

2°) $F(0)=\int_0^{\sqrt{\tan 0}} \frac{t}{1+t^4}dt = \int_0^0 \frac{t}{1+t^4}dt = 0$; On a : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}x$

3°) $I = \int_0^1 \frac{t}{1+t^4}dt = \int_0^{\sqrt{\tan\frac{\pi}{4}}} \frac{t}{1+t^4}dt = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$

EXERCICE N°3:

1°)a) Soit α l'angle de f alors $\alpha \equiv (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) + \pi[2\pi]$

Alors $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit k le rapport de f alors $k = \frac{CA}{AB} = 2$

b) Comme $f(A) = C$ et $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors le centre de f appartient au cercle Γ_1 de diamètre $[AC]$ de plus $f(B) = A$ alors le centre de f appartient au cercle Γ_2 de diamètre $[BA]$. Γ_1 et Γ_2 se coupent

en A et Ω car A ΩB et A ΩC sont deux triangles rectangles en Ω

or $f(A) = C \neq A$ donc $f(\Omega) = \Omega$ et Ω est le centre de f

c) On a $S_{(AC)}(\Omega) = F$ et $S_{(AB)}(\Omega) = E$ donc $S_{(AC)}\circ S_{(AB)}(E) = S_{(AC)}(\Omega) = F$

Or $S_{(AC)}\circ S_{(AB)} = S_A$ car (AB) et (AC) sont perpendiculaires en A

Alors $S_A(E) = F$ donc A est le milieu de [EF]

On a : $(\overrightarrow{\Omega E};\overrightarrow{\Omega F}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\frac{\Omega F}{\Omega E} = \tan \Omega EA = \tan E\Omega A = \tan \Omega AC = \frac{\Omega C}{\Omega A} = 2$

En effet ΩEA est un triangle isocèle en A car A est le milieu de [EF] et ΩEF est rectangle en Ω on ajoute que $E\Omega A$ et ΩAC sont deux angles alternes internes égaux du fait que (AB) et (ΩF) sont parallèles coupées par (ΩF) alors $f(E) = F$

2°)a) Soit k' le rapport de f alors $k' = \frac{\Omega F}{\Omega F} = 2$

b) $g\circ g(E) = g(\Omega) = F$. on a $g\circ g = h_{(ш\ ,\ 4)}$ donc $h_{(ш\ ,\ 4)}(E) = F$ alors

$\overrightarrow{шF} = 4\overrightarrow{шE}$ alors $ш \in (EF)$

3°)a) $g\circ f^{-1}(\Omega) = g(\Omega) = F$; $g\circ f^{-1}(F) = g(E) = \Omega$.

On a : g est une similitude indirecte de rapport 2 et f^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ donc $g\circ f^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport 1 alors $g\circ f^{-1}$ est un antidéplacement et on a :

$g\circ f^{-1}(\Omega * F) = F * \Omega$ donc $\Omega * F$ est un point fixe par $g\circ f^{-1}$ alors $g\circ f^{-1}$ Est une symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de [ΩF] alors $g\circ f^{-1} = S_{(AC)}$

b) $g(A) = g\circ f^{-1}(C) = S_{(AC)}(C) = C$; $g(B) = g\circ f^{-1}(A) = S_{(AC)}(A) = A$

$g\circ g = h_{(ш;4)}$ et $g\circ g(B) = g(A) = C$ alors $h_{(ш;4)}(B) = C$

alors $\overrightarrow{шC} = 4\overrightarrow{шB}$ donc $ш \in (BC)$

c) ш est le point d'intersection de (BC) et (EF) et Δ est la bissectrice intérieur de $[\overrightarrow{шA};\overrightarrow{шC}]$

4°)a) $Z_A = 0$; $Z_B = 2i$ $\quad et\ Z_C = 4$

b) $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = az + b$ on a $f(A) = C \Leftrightarrow b = 4$

et $f(B) = A \Leftrightarrow 2ia + 4 = 0 \Leftrightarrow 2ia = -4 \Leftrightarrow a = \frac{-2}{i} = 2i$

Conclusion : $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = 2iz + 4$

c) $g(M) = M' \Leftrightarrow z' = \beta\bar{z} + \gamma$ on a : $g(A) = C \Leftrightarrow \gamma = 4$

et $g(B) = A \Leftrightarrow \beta\overline{2i} + 4 = 0 \Leftrightarrow -2i\beta = -4 \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{i} = -2i$

Conclusion : $g(M) = M' \Leftrightarrow z' = -2i\bar{z} + 4$

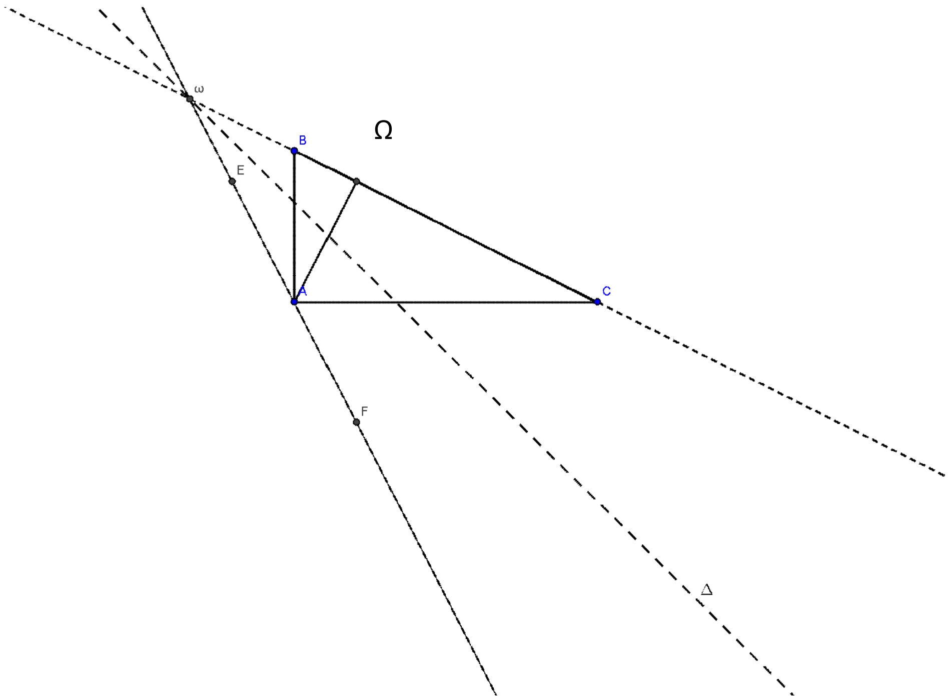
d) $Z_ш = \frac{-2i\bar{4}+4}{1-|-2i|^2} = \frac{4-8i}{1-4} = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3}i$ et $Z_\Omega = \frac{4}{1-2i} = \frac{4(1+2i)}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$

$\Delta = \left\{M \text{ du plan tel que}: g(M) = M' \ et\ \overrightarrow{шM'} = 2\overrightarrow{шM}\right\}$

soit $z = x + iy$; $(x, y) \in IR^2$

$M \in \Delta \Leftrightarrow g(M) = M'\ et\ \overrightarrow{шM'} = 2\overrightarrow{шM} \Leftrightarrow \begin{cases} z' - Z_ш = 2(z - Z_ш) \\ z' = -2i\bar{z} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2i\bar{z} + 4 + \frac{4}{3} - \frac{8}{3}i = 2\left(z + \frac{4}{3} - \frac{8}{3}i\right) \\ z' = -2i\bar{z} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

−2iz–2z+83+83i=0z′=−2iz+4⇔−2ix–iy–2x+iy+83+83i=0z′=−2iz+4⇔−2x–2y+83+i–2x–2y+83=0z′=−2iz+4⇔−2x–2y+83=0z′=−2iz+4 d'où *Δ: −2x–2y+83=0*



EXERCICE N°4:

1°)a) $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{1-x}}{x\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=+\infty$

Alors f n'est pas dérivable à droite en 0. C_f admet au point $(0,0)$ une demi tangente verticale dirigée vers le haut

b) f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x\in]0,1[$;

$$f'(x)=\frac{\frac{1-x+x}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=\frac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}>0$$

X	0	1
f	0 ↗	$+\infty$

c) f est strictement croissante sur $[0,1[$ donc f réalise une bijection de $[0,1[$ sur $f([0,1[)$. De la continuité de f sur $[0,1[$ on a :

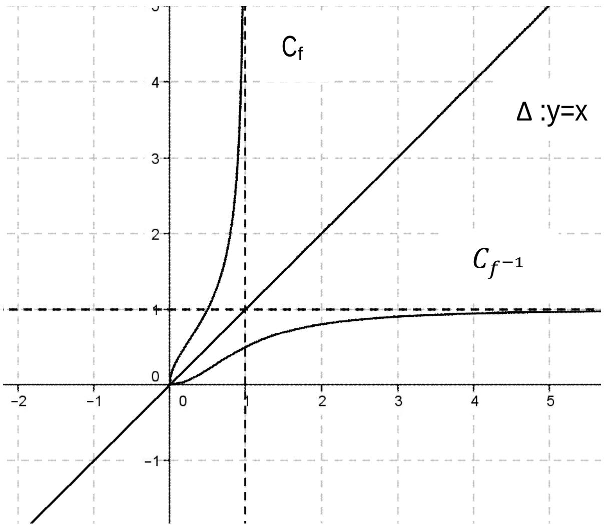
$f([0,1[)=\left[f(0);\lim_{x\to+\infty}f\right[=[0,+\infty[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,+\infty[$

d) pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$ et $y\in[0,1[$ $\Leftrightarrow$

pour tout $y\in[0,1[$ on a : $\sqrt{\frac{y}{1-y}}=x \Leftrightarrow$ pour tout $y\in[0,1[$ on a $\frac{y}{1-y}=x^2$

$\Leftrightarrow$ pour tout $y\in[0,1[$ on a ; $y=\frac{x^2}{1+x^2}=f^{-1}(x)$

e)



2°) En effectuant la symétrie orthogonale d'axe $y=x$ du domaine limité par C_f ; $x=0$ et $y=1$ on trouve un domaine de même aire car la symétrie conserve les mesure des aires le nouveau domaine est limité par : $C_{f^{-1}}$; $y=0$ et $x=1$ donc

A$=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$

3°)a) $U_{n+1}-U_n=\int_0^1\frac{t^{2(n+1)+2}}{1+t^2}dt-\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{t^{2n+4}-t^{2n+2}}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{t^{2n+2}(t^2-1)}{1+t^2}dt\le 0$

Car $t\mapsto 1+t^2$ est continue strictement positive sur [0,1]

$t\mapsto t^2-1$ est continue négative sur [0,1]

Et $t\mapsto t^{2n+2}$ est continue positive sur [0,1]

Il en résulte que $t\mapsto\frac{t^{2n+2}(t^2-1)}{1+t^2}$ est continue négative sur [0,1]

Alors U est décroissante

b) On a : $0\le t\le 1$ *alors* $0\le t^2\le 1$ alors $1\le 1+t^2\le 2$ *donc* $\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+t^2}\le 1$

$0\le\frac{1}{2}\le\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\le t^{2n+2}$ *alors* $0\le\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\le\int_0^1 t^{2n+2}dt\le\left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1\le\frac{1}{2n+3}\le\frac{1}{2n+1}$

c) On a pour tout $n\in IN$: $0\le U_n\le\frac{1}{2n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

Alors $\lim_{n\to+\infty}U_n=0$

4°)a) On a : $1-t^2+t^4+\cdots+(-1)^n t^{2n}-\frac{1}{1+t^2}=-\frac{1}{1+t^2}+\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k$; $-t^2\ne 1$

$$=-\frac{1}{1+t^2}+\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}=\frac{-(-1)^{n+1}(t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

$$=(-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

b) On a $-\frac{1}{1+t^2}+\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k=(-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ alors

$-\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k dt=(-1)^n\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$ alors $-I+\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-t^2)^k dt$ alors $-I+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1=(-1)^n U_n$ donc $-I+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=(-1)^n U_n$

alors $v_n-I=(-1)^n U_n$

c) On a : $v_n-I=(-1)^n U_n$ alors $|v_n-I|=|(-1)^n U_n|=U_n\le\frac{1}{2n+1}$

$\lim_{n\to+\infty}U_n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=I$

d) $v_3=\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{3}+\frac{2}{35}=\frac{70+6}{105}=\frac{76}{105}$

on a $|v_3-I|\le\frac{1}{7}\Leftrightarrow-\frac{1}{7}\le\frac{76}{105}-I\le\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{76}{105}-\frac{1}{7}\le I\le\frac{76}{105}+\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{61}{105}\le I\le\frac{91}{105}$

$\Leftrightarrow\ 0{,}581\le I\le 0{,}867$

4°)a) $t\mapsto 1+t^2$ est continue sur IR et pour tout $t\in IR$ *on a* : $1+t^2\ne 0$

φ une fonction continue sur IR. $x\to\tan x$ *est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Et $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)=IR$ de plus $0\in IR$ donc F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x)=(1+(\tan x)^2).\frac{\varphi(\tan x)}{1+(\tan x)^2}=\varphi(\tan x)$

b) Premier cas: $\varphi(t)=1$ alors $F'(x)=1$ Or F est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Alors $F(x)=x+C$ Or $F(0)=\int_0^0\frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt=0$ donc C =0 et $F(x)=x$

Premier cas: $\varphi(t)=t^2$ alors $F'(x)=(\tan x)^2$ et F est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ alors $F(x)=\tan x-x+C$ de même F(0)=0 donc C=0 alors

$F(x)=\tan x-x$

c) $I=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\tan\frac{\pi}{4}}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}$ avec φ celle du Premier cas

et **A**$=\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int_0^{\tan\frac{\pi}{4}}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$

EXERCICE N°5:

1°) Soit B l'aire demandée.

B=$\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = \left[\sqrt{x^2+2x+5}\right]_{-1}^{0} = (\sqrt{5}-2)$ U.a

2°)f est continue strictement croissante sur IR donc g réalise une bijection de IR sur f$(IR) =]-1,1[$

3°) la courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à

La droite : $y = x$

4°)a)$h'(x) = 2(1+(\tan x)^2) > 0$ .h est continue strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ donc h réalise une bijection

de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ $sur\ h\left(\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{\frac{-\pi}{2}^+} h ; \lim_{\frac{\pi}{2}^-} h\right[= IR$

b)On a:h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et $h'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

alors h^{-1} est dérivable sur IR. soit $h^{-1}(y) = x = 2\tan x - 1$

$h'(y) = 2(1+(\tan y)^2)=2\left(1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)=\frac{x^2+2x+5}{2}$ Or $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(y)} = \frac{2}{x^2+2x+5}$

5°)a) $h(a) = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \Leftrightarrow 2\tan a - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \Leftrightarrow \tan a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{6}$

$h(b) = 2\sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow 2\tan b - 1 = 2\sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow \tan b = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{3}$

b) $f^2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+5}=\frac{x^2+2x+5-4}{x^2+2x+5} = 1 - 2\frac{2}{x^2+2x+5}=1-2(h^{-1})'(x)$

c)V= $\pi\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}^{2\sqrt{3}-1} f^2(x)dx = \pi\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}^{2\sqrt{3}-1}\left(1-2(h^{-1})'(x)\right)dx = \pi[x - 2h^{-1}(x)]_{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}^{2\sqrt{3}-1}$

$= \pi\left(\left[2\sqrt{3}-1-2h^{-1}(2\sqrt{3}-1)\right] - \left[\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 - 2h^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\right]\right.$

$=\pi\left(2\sqrt{3}-1-2\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}+1+2\frac{\pi}{6}\right) = \pi\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}\right)$

BON TRAVAIL