

Exercice 1 (QCM) (3 points)

Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la grille jointe en fin d'énoncé. Pour chacune des trois questions, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Vous devez recopier la grille et inscrire **V** (vrai) ou **F** (faux) dans la case correspondante à la réponse. Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent 0,50 point.

ABCDEFGH est un cube tel que $AB = a$ où $a > 0$, O est le milieu du segment [AG] et l'espace est rapporté au repère orthonormé direct $\left(D, \frac{\overrightarrow{DA}}{a}, \frac{\overrightarrow{DC}}{a}, \frac{\overrightarrow{DH}}{a} \right)$.

<p>1. La distance de A à la droite (BD) est égale à :</p> <p><input type="checkbox"/> A a ; <input type="checkbox"/> B $\frac{a}{\sqrt{2}}$; <input type="checkbox"/> C $\frac{a}{2}$</p> <p>2. L'aire du triangle ADO vaut :</p> <p><input type="checkbox"/> A $\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$; <input type="checkbox"/> B $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$; <input type="checkbox"/> C $\frac{a^2}{4}$</p> <p>3. Le volume du tétraèdre ABDH vaut :</p> <p><input type="checkbox"/> A $\frac{a^3}{2}$; <input type="checkbox"/> B $\frac{a^3}{3}$; <input type="checkbox"/> C $\frac{a^3}{6}$</p>	
--	--

Question	Proposition A	Proposition B	Proposition C
1			
2			
3			

Exercice 2 (6 points)

Un magasin vend 1000 pochettes en cuir parmi lesquelles certaines sont défectueuses. Ces pochettes sont fabriquées par trois usines U_1 , U_2 et U_3 selon le tableau suivant :

	Usine U_1	Usine U_2	Usine U_3
Nombre de pochettes	200	350	450
Pourcentage de pochettes défectueuses	5%	4%	2%

On choisit au hasard une pochette de ces 1000 pochettes et on considère les événements suivants :

A : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine U_1 ».

B : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine U_2 ».

C : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine U_3 ».

D : « La pochette choisie est défectueuse ».

1. Dessiner l'arbre de probabilité correspondant à cette épreuve.

2. a) Prouver que la probabilité $P(D \cap A)$ est égale à $\frac{1}{100}$.

b) Calculer les probabilités suivantes : $P(D \cap B)$, $P(D \cap C)$ et $P(D)$.

3. Sachant que la pochette choisie n'est pas défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle soit fabriquée par l'usine U_1 ?

4. La pochette est vendue à 50 Dinar si elle est produite par l'usine A, à 60 Dinar si elle

est produite par l'usine U_2 et à 80 Dinar si elle est produite par l'usine U_3 .

Une réduction (**solde**) de 30 % est faite sur le prix de chaque pochette défectueuse.

On désigne par X la variable aléatoire égale au prix final d'une pochette choisie au hasard.

- Montrer que les valeurs de X sont 35, 42, 50, 56, 60 et 80.
- Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 3 (5 points)

On donne l'équation différentielle (E) : $y' - y - e^x + 1 = 0$. On pose $z = y - xe^x - 1$.

- Montrer que vérifie l'équation différentielle (E') : $z' = z$ et déterminer z en fonction de x .
- Déduire que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x - 1)e^x + 1$ est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.
- Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (D) à (C).
 - Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote (D).
- Vérifier, en utilisant la question 2. , que pour tout x réel, $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$
 - Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 4 (6 points)

La figure ci-dessous, montre la courbe représentative (Γ) , dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = 1 - x + 2 \ln x$.

- Montrer par calcul que : $3,51 < \alpha < 3,52$.
 - Donner, en utilisant le graphique, le signe de $h(x)$ sur $]0; +\infty[$

2- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x^2}$.

a) Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = -\frac{4 \ln x}{x^3}$.

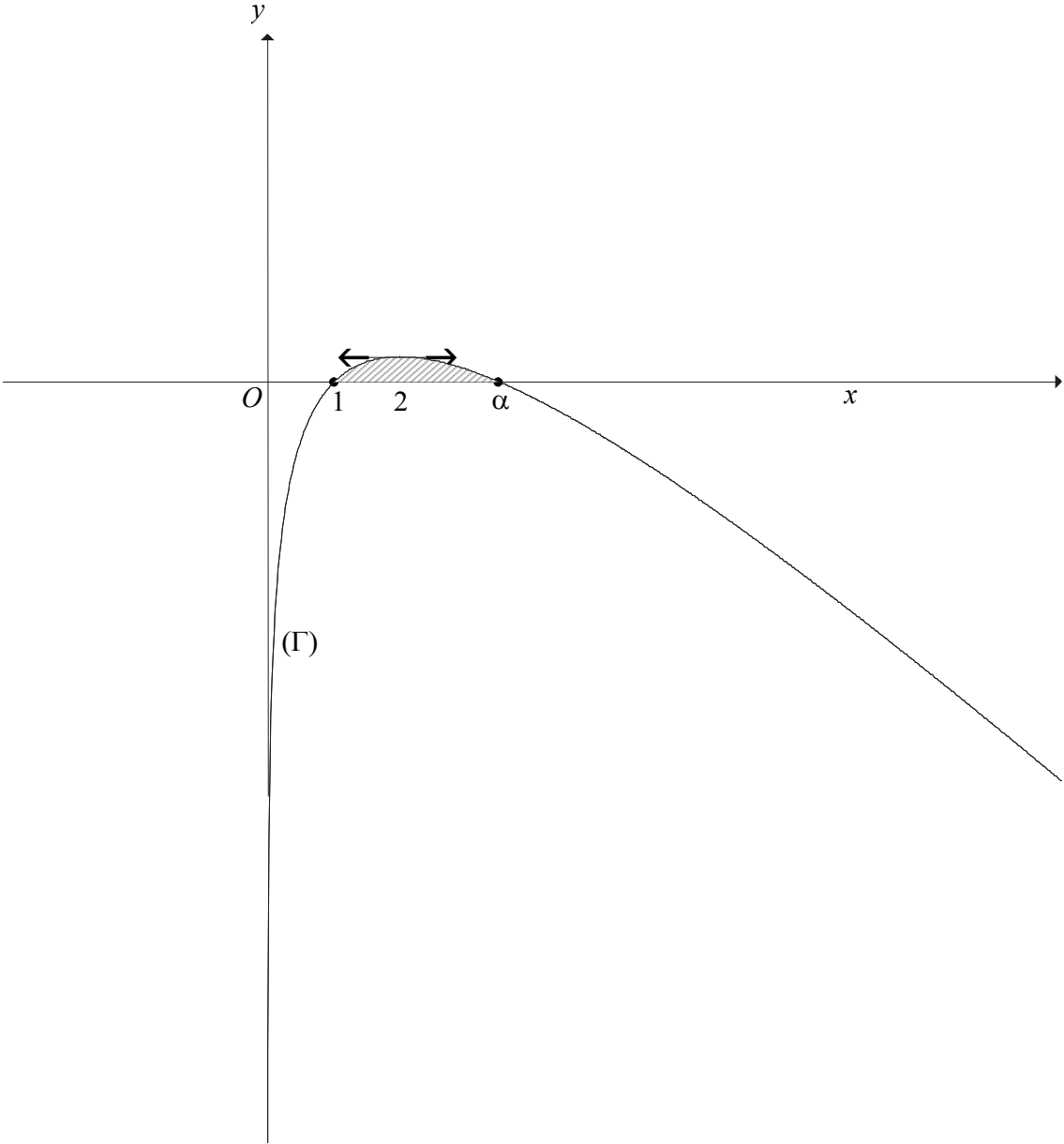
b) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

3- Soit (I_n) la suite définie, pour $n \geq 4$, par $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

a) Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $[4; +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 4$, $0 \leq I_n \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

c) Déterminer la limite de la suite (I_n) .



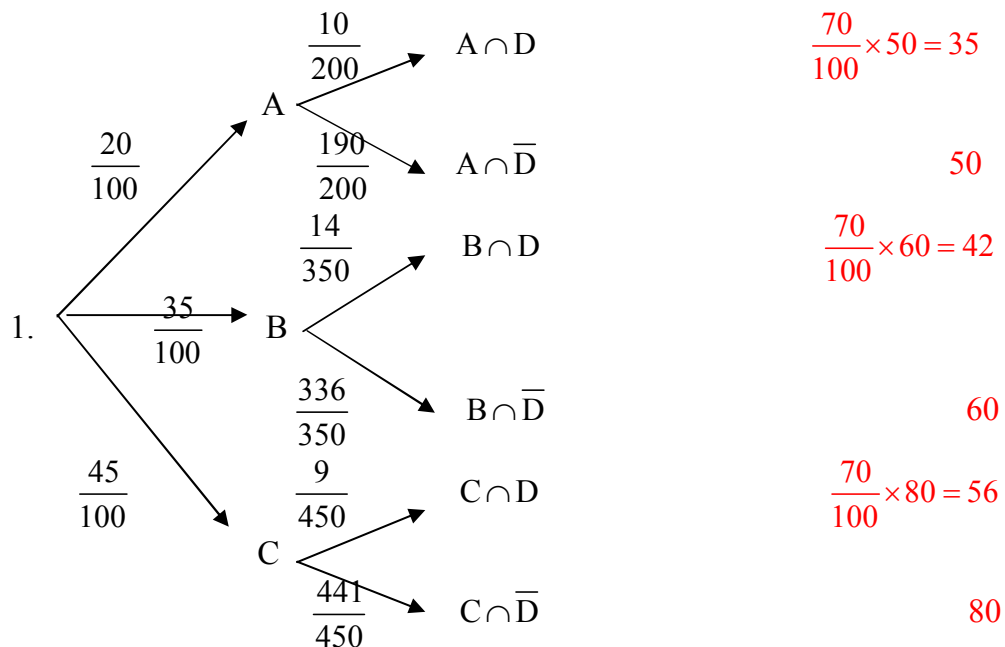
Corrigé

Exercice 1

Question	Proposition A	Proposition B	Proposition C
1	F	V	F
2	V	F	F
3	F	F	V

Exercice 2 :

	Usine U ₁	Usine U ₂	Usine U ₃	Total
Nombre de pochettes défectueuses	10	14	9	33
Nombre de pochettes non défectueuses	190	336	441	967
Total	200	350	450	1 000



$$2. a) P(D \cap A) = P(A) \cdot P(D/A) = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$$

$$b) P(D \cap B) = P(B) \cdot P(D/B) = \frac{14}{1000} = \frac{7}{500}; P(D \cap C) = P(C) \cdot P(D/C) = \frac{9}{1000}$$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{10+14+9}{1000} = \frac{33}{1000}$$

Ou encore : $P(D) = \frac{33}{1000}$ par lecture directe du tableau.

$$3. P(A/\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{D}|A)}{1 - P(D)} = \frac{190}{967}$$

4. Les valeurs de X sont : 35 ; 42 ; 50 ; 56 ; 60 et 80 (voir colonne à droite de l'arbre)

x_i	35	42	50	56	60	80	Total
p_i	0,01	0,014	0,19	0,009	0,336	0,441	1

Exercice 3 :

- $y' - y - e^x + 1 = 0$; $y = z + xe^x + 1$; $y' = z' + e^x + xe^x$; $z' + e^x + xe^x - z - xe^x - 1 - e^x + 1 = 0$
 $z' - z = 0$; $z = ke^x$, où k est une constante réelle.
 - $f(x) = ke^x + xe^x + 1$; $f(0) = k + 1 = 0$ d'où $k = -1$. Ainsi : $f(x) = -e^x + xe^x + 1$.
 - a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x + 1) = 1$, donc la droite (D) d'équation $y = 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.
 b) $f(x) - 1 = (x - 1)e^x$. (C) coupe (D) au point E (1 ; 1).
 (C) est au dessus de (D) sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
 (C) est au dessous de (D) sur l'intervalle $]-\infty, 1]$
4. a) Pour tout x réel, $f'(x) - f(x) - e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) - 1 = f'(x) - e^x$
- b) $\mathcal{A} = \int_0^1 [1 - f(x)] dx$ ou $\int_0^1 (e^x - f'(x)) dx$ ou $\int_0^1 [e^x - f(x)] dx$ ou $(e - 2)$ ua

Exercice 4

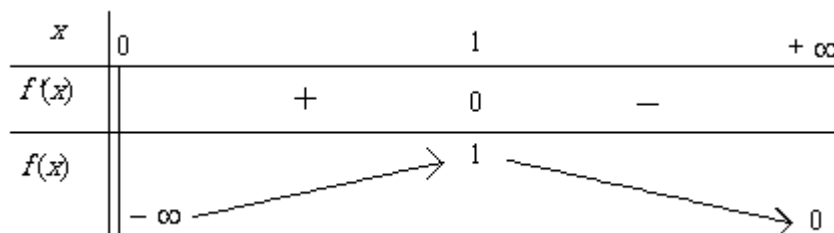
1.a) $h(3.51) \approx 0.001$ et $h(3.52) \approx -0.003$. Donc $3.51 < \alpha < 3.52$.

b) D'après la courbe (Γ) : $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \alpha$.

$h(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < \alpha$ et $h(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ ou $\alpha < x$

2. a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{4 \ln x}{x^3}$.

$$b) f(\alpha) = \frac{1 + 2 \ln \alpha}{\alpha^2} = \frac{h(\alpha) + \alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$



3. a) Pour tout $x \in [4; +\infty[$, $f(x) > 0$.

$$f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1 + 2 \ln x - x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} ; \text{ pour } x \in [4; +\infty[, x > \alpha \text{ et } h(x) < 0 .$$

Ainsi, pour tout $x \in [4; +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.

b) Pour tout $n \geq 4$, $0 \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$ donc $0 \leq I_n \leq \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \ln(1) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.