

Exercice 1 (3 points)

Dans le tableau ci-dessous, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond.

N	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	Le reste de la division de 8^{343} par 9 est :	4	6	8
2	Si A et B sont deux évènements, indépendants, d'un même univers tels que l'on ait : $p(A) = 0,1$ et $p(B) = 0,5$, alors :	$p(A \cup B) = 0,05$	$p(A \cup B) = 0,55$	$p(A \cup B) = 0,6$
3	$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}}}$	1	0	$+\infty$

Exercice 2 (5 points)

Une entreprise a acheté n imprimantes à 728 dinars l'unité et p cartouches à 80 dinars l'unité. Le coût total de cet achat a été de 3 296 dinars.

- Démontrer que le couple (n, p) est solution de l'équation (E) : $91x + 10y = 412$ avec x et y entiers relatifs.
- a) Démontrer que, si un couple (x, y) est solution de (E), alors $x \equiv 2 \pmod{10}$.
b) En déduire les solutions de (E).
- Déterminer les entiers n et p.

Exercice 3 (6 points)

Soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = \frac{2e^{nx}}{1+e^x} - 1$, où n est un entier naturel, et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Etudier les variations de la fonction f_0 correspondante à $n = 0$ et tracer (C_0) .
- Démontrer que (C_1) est symétrique de (C_0) par rapport à l'axe des abscisses.
- Calculer, en unités d'aires, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_1) , (C_0) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

4. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = 2 \frac{(e^n - n - 1)}{n}$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} + u_n)$ et en déduire que la suite (u_n) ne peut pas être convergente.

Exercice 4 (6 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont notés de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- Si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On considère les événements :

B : « le jeton tiré est blanc » et G : « le joueur gagne le jeu ».

Partie A

1. a) Faire un arbre de probabilité.

b) Montrer que $p(G) = \frac{7}{30}$.

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1D par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5D.
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

a) Montrer que les valeurs de X sont -1 et 4 puis déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance $E(X)$ et montrer que le jeu est défavorable à l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.

a) Calculer $p(G)$.

b) Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

Exercice 1 :

1. c) On a : $8^2 \equiv 1 \pmod{9}$ et $343 = 2 \times 171 + 1$ donc $8^{343} \equiv 8^{2 \times 171} \times 8 \pmod{9}$
d'où $8^{343} \equiv 8 \pmod{9}$
2. b) A et B sont indépendants donc $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0,05$
D'où $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,1 + 0,5 - 0,05 = 0,55$
3. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot 2\sqrt{x} = 1 \times 0 = 0$
Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}}} = e^0 = 1$

Exercice 2:

1. On aura : $728n + 80p = 3296$.

(n, p) est donc solution de l'équation $728x + 80y = 3296 \Leftrightarrow 91x + 10y = 412$

Car $728 = 8 \times 91$, $80 = 8 \times 10$ et $3296 = 8 \times 412$.

2. a) Si (x, y) est solution de (E) : $91x + 10y = 412$, on aura $91x = 412 - 10y$.

Donc $91x \equiv 412 \pmod{10}$ et comme $91 \equiv 1 \pmod{10}$ et $412 \equiv 2 \pmod{10}$ alors
 $x \equiv 2 \pmod{10}$.

b) On aura donc $x = 2 + 10k$, $k \in \mathbb{Z}$

et $91(2 + 10k) + 10y = 412 \Leftrightarrow 10y = 412 - 91 \times 2 - 91 \times 10k = 230 - 910k$

D'où $y = 23 - 91k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : si $(x, y) = (2 + 10k, 23 - 91k)$, on aura bien

$$91(2 + 10k) + 10(23 - 91k) = 412.$$

L'ensemble des solutions de (E) est $\{(2 + 10k, 23 - 91k), k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Comme on doit avoir n et p dans \mathbb{N} , alors :

$$\begin{cases} 2 + 10k \geq 0 \\ 23 - 91k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -\frac{2}{10} \\ k \leq \frac{32}{91} \end{cases} \Leftrightarrow k = 0.$$

L'entreprise a acheté 2 imprimantes et 23 cartouches d'encre.

Exercice 3 :

1. On a pour tout x réel, $f_0(x) = \frac{2}{1+e^x} - 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 2 - 1 = 1.$$

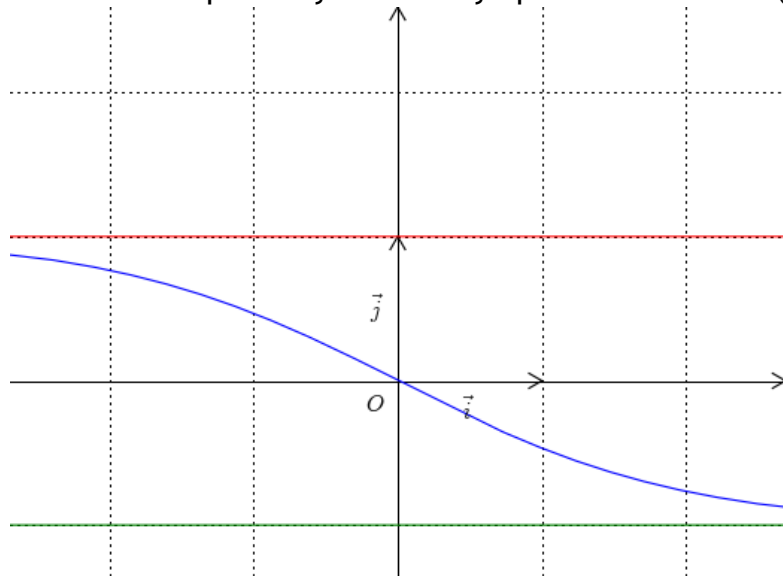
f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x réel, $f'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} < 0$.

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$	-	
$f_0(x)$	1	-1

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe (C_0) au voisinage de $+\infty$.

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe (C_0) au voisinage de $-\infty$.



$$2. \text{ Pour tout } x \text{ réel, } f_1(x) + f_0(x) = \frac{2e^x}{1+e^x} - 1 + \frac{2}{1+e^x} - 1 = \frac{2(e^x+1)}{1+e^x} - 2 = 0$$

donc (C_1) est symétrique de (C_0) par rapport à l'axe des abscisses.

3. L'aire demandée A est égale au double de l'aire du domaine limité par (C_1) , les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et l'axe des abscisses donc

$$\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{2e^x}{1+e^x} - 1 \right) dx = \left[2 \ln(1+e^x) - x \right]_0^1 = 2 \ln \frac{1+e}{2} - 1$$

$$\text{Donc } A = 2 \int_0^1 f_1(x) dx = 4 \ln \left(\frac{1+e}{2} \right) - 2$$

$$4. \text{ a) } u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \left(\frac{2e^{(n+1)x}}{e^x+1} + \frac{2e^{nx}}{e^x+1} - 2 \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{2e^{nx}(e^x+1)}{e^x+1} - 2 \right] dx$$

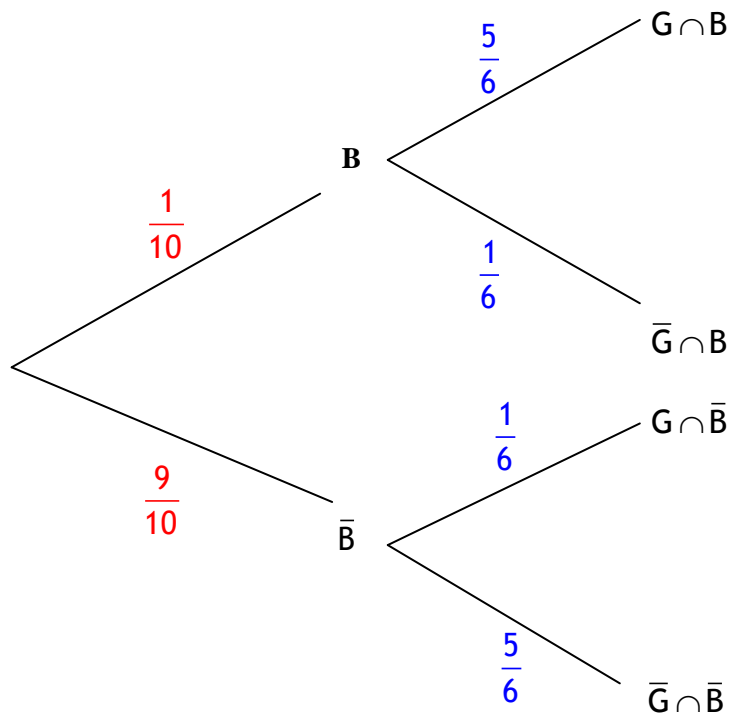
$$= \int_0^1 [2e^{nx} - 2] dx = \left[\frac{2}{n} e^{nx} - 2x \right]_0^1 = 2 \frac{e^n - n - 1}{n}.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} + u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{e^n}{n} - 2 - \frac{2}{n} \right) = +\infty.$$

Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $(u_{n+1} + u_n)$ converge vers le réel 2ℓ ; ce qui est impossible.

Exercice 4:**Partie A**

1. a)



b) la formule de probabilité totale ainsi que l'arbre de probabilité donnent :

$$p(G) = p(B \cap G) + p(\bar{B} \cap G) = p(B) \cdot p(G|B) + p(\bar{B}) \cdot p(G|\bar{B}) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{30}.$$

$$2. \quad p(B|\bar{G}) = \frac{p(B \cap \bar{G})}{p(\bar{G})} = \frac{p(B \cap \bar{G})}{1 - p(G)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{30}} = \frac{1}{46}.$$

Partie B

1. a) On a :

Les cas possibles	Le gain algébrique du joueur
$G \cap B$	$5 - 1 = 4$
$\bar{G} \cap B$	-1
$G \cap \bar{B}$	$5 - 1 = 4$
$\bar{G} \cap \bar{B}$	-1

Ainsi les valeurs de X sont : -1 et 4.

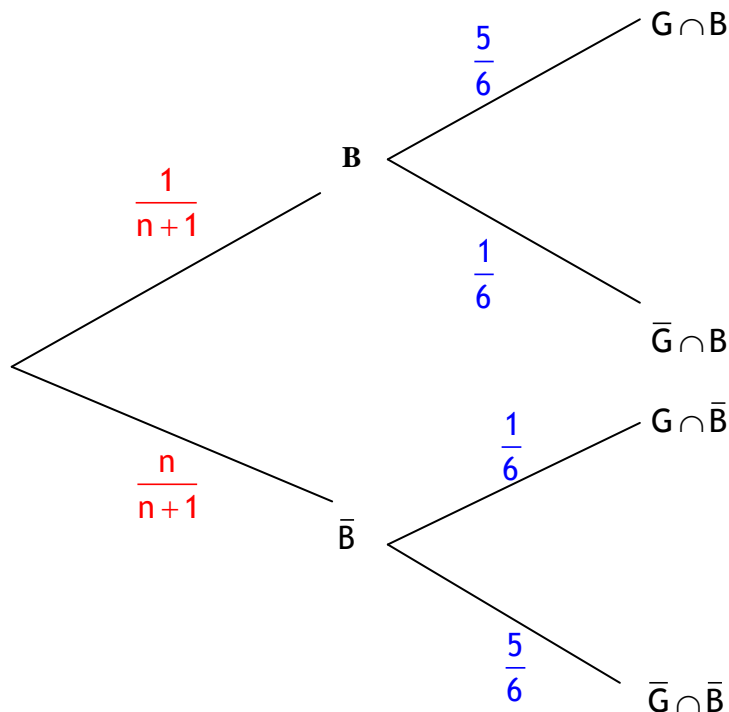
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-1	4	Total
p_i	$p(\bar{G}) = 1 - \frac{7}{30} = \frac{23}{30}$	$p(G) = \frac{7}{30}$	1

b) L'espérance mathématique de X est $E(X) = -1 \times \frac{23}{30} + 4 \times \frac{7}{30} = \frac{1}{6}$.

$E(X) > 0$ donc le jeu est favorable au joueur donc défavorable à l'organisateur.

2. a) On refait un autre arbre :



$$p(G) = p(B \cap G) + p(\bar{B} \cap G) = p(B) \cdot p(G|B) + p(\bar{B}) \cdot p(G|\bar{B}) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{n+5}{6(n+1)}$$

b) On en déduit que $p(\bar{G}) = 1 - \frac{n+5}{6(n+1)} = \frac{5n+1}{6(n+1)}$.

L'espérance mathématique de X devient :

$$E(X) = -1 \times \frac{5n+1}{6(n+1)} + 4 \times \frac{n+5}{6(n+1)} = \frac{-n+19}{6(n+1)}$$

Le jeu est favorable pour l'organisateur si et seulement si $E(X) \leq 0$

$$\text{Or } E(X) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-n+19}{6(n+1)} \leq 0 \Leftrightarrow n \geq 19.$$

Le jeu devient favorable à l'organisateur dès que n dépasse 19.