

Exercice 1 (5 points)

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} e^{-x} = 0$
- On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = e^{3x}$. Soit f la solution de (E) définie sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 1$.
 - $f'(0) = 1$.
 - Pour tout x réel, $\int_0^x f(t) dt = \frac{3f(x) - e^{3x} - 2}{9}$
- Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $\left(5, \frac{1}{2}\right)$.
 - La variance de X est $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
 - La probabilité de l'évènement $(X \leq 2)$ est $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit les points $A(-1, 1)$ et $B(3, 2)$. On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point $M(x, y)$, associe le point $M'(x', y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x - y + 3 \end{cases}$$

- Soit M_0 le point d'affixe $2 - 4i$.
Vérifier que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AM}'_0 sont orthogonaux.
- On considère un point M dont les coordonnées x et y sont des entiers.
Démontrer que : les vecteurs \vec{AB} et \vec{AM}' sont orthogonaux si, et seulement si, $5x + 3y = -2$.
- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $5x + 3y = -2$.
- En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6 ; 6]$ tels que \vec{AB} et \vec{AM}' sont orthogonaux.

Exercice 3 (5 points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$, on considère le cube OIRJKLMN voir ci-dessous .

On note A le milieu du segment $[IL]$ et B l'image du point N par l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{2}{3}$.

1. a) Déterminer les coordonnées de A et montrer

$$\text{que } B\left(0, \frac{2}{3}, 1\right).$$

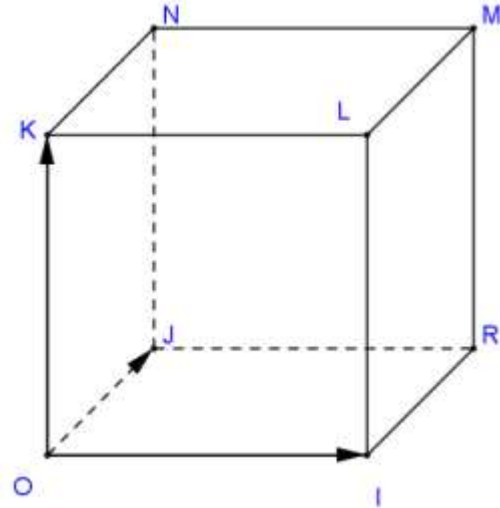
2. a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés .

b) Montrer que l'aire du triangle OAB est $\frac{\sqrt{14}}{6}$

3. a) Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par B et perpendiculaire à la droite (OA).

b) Vérifier que K n'appartient pas au plan (P) et que calculer la distance du point K au plan (P).

c) Donner le volume du tétraèdre OABK.



Exercice 4 (5 points)

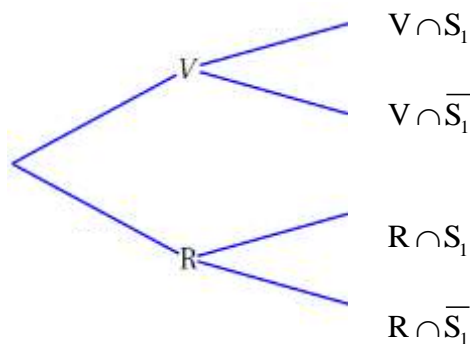
Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On note :

- V l'évènement : « le dé tiré est vert »
- R l'évènement : « le dé tiré est rouge »
- S_1 l'évènement : « on obtient 6 au lancer du dé ».

1. On tire au hasard un dé et on effectue un lancer de celui-ci.

a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. Calculer la probabilité $p(S_1)$.

2. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé n fois de suite. On note S_n l'évènement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».

a. Démontrer que : $p(S_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers.

Démontrer que :
$$p_n = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$$

c. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $p_n \geq 0,999$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 1

1. **Vrai**

$$\text{En effet : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}} = 0.$$

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = e^{3x}$. Soit f la solution de (E) définie sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 1$.

a) **Faux.**

$$\text{En effet : } f'(0) - 3f(0) = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1 + 3f(0) \Leftrightarrow f'(0) = 4.$$

b) **Vrai**

En effet : Pour tout réel x et pour tout t compris entre 0 et x ,

$$f'(t) - 3f(t) = e^{3t} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{3}(f'(t) - e^{3t})$$

$$\text{Donc } \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{3}(f'(t) - e^{3t}) dt = \left[\frac{1}{3} \left(f(t) - \frac{1}{3} e^{3t} \right) \right]_0^x = \left[\frac{3f(t) - e^{3t}}{9} \right]_0^x = \frac{3f(x) - e^{3x} - 2}{9}$$

3. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $\left(5, \frac{1}{2}\right)$.

a) **Faux**

$$\text{En effet : La variance de } X \text{ est } V = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

b) **Vrai**

$$\text{En effet : } p(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$$

$$= C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 16 \times \frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit les points $A(-1, 1)$ et $B(3, 2)$. On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point $M(x, y)$, associe le point $M'(x', y')$

$$\text{tel que } \begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x - y + 3 \end{cases}$$

1. Si M_0 le point d'affixe $2 - 4i$ alors $M_0'(-3, 9)$.

Donc $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AM}'_0 \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{AB} \cdot \vec{AM}'_0 = -8 + 8 = 0$ donc $\vec{AB} \perp \vec{AM}'_0$.

2. On a : $\vec{AM}' \begin{pmatrix} x+y \\ x-y+2 \end{pmatrix}$ donc

$$\vec{AB} \perp \vec{AM}' \Leftrightarrow 4(x+y) + (x-y+2) = 0 \Leftrightarrow 4x + 4y + x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y = -2.$$

3. (2, -4) est une solution de l'équation $5x + 3y = -2$.

Ainsi, $5x + 3y = -2 \Leftrightarrow 5(x-2) + 3(y+4) = 0 \Leftrightarrow 5(x-2) = -3(y+4)$.

$5 \wedge 3 = 1$ et 3 divise $x-2$ donc $x-2 = 3k$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Il en résulte : $5 \times 3k = -3(y+4) \Leftrightarrow y+4 = -5k \Leftrightarrow y = -5k-4$

La réciproque :

Si $(x, y) = (3k+2, -5k-4)$, où $k \in \mathbb{Z}$, alors $5x + 3y = 5(3k+2) + 3(-5k-4) = -2$.

Ainsi, $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(3k+2, -5k-4), k \in \mathbb{Z}\}$.

4. $-6 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq 3k+2 \leq 6 \Leftrightarrow -8 \leq 3k \leq 4 \Leftrightarrow k \in \{-2, -1, 0, 1\}$

$$-6 \leq y \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq -5k-4 \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq -5k \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq 5k \leq 2 \Leftrightarrow k \in \{-2, -1, 0\}$$

On en déduit que les points $M_k(3k+2, -5k-4)$, où $k \in \mathbb{Z}$, dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6; 6]$ tels que \vec{AB} et \vec{AM}'_k sont orthogonaux sont :

$MM_{-2}(-4, 6)$, $M_{-1}(-1, 1)$ et $M_0(2, -4)$.

Exercice 3

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$, on considère le cube OIRJKLMN voir ci-dessous.

On note A le milieu du segment [IL] et B l'image du point N par l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{2}{3}$.

1. a) On a : I(1,0,0) et L(1,0,1) donc $A \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$.

On a : K(0,0,1) et $\vec{KN} = \vec{OJ}$ donc $\vec{KN} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$B = h_{\left(K, \frac{2}{3}\right)}(N) \Leftrightarrow \vec{KB} = \frac{2}{3} \vec{KN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 0 \\ y_B = \frac{2}{3} \\ z_B - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 0 \\ y_B = \frac{2}{3} \\ z_B = 1 \end{cases} \text{ donc } B \left(0, \frac{2}{3}, 1\right).$$

$$2. \text{ a) On a } \overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

D'où $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$, donc les vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} ne sont pas colinéaires et par suite les points O, A et B ne sont pas alignés.

$$\text{b) L'aire du triangle OAB est } \mathcal{A}(\text{OAB}) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{9} + 1 + \frac{4}{9}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{6}.$$

3. a) \overrightarrow{OA} est un vecteur normal au plan P donc P : $x + \frac{1}{2}z + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$.

$$\text{Or } B\left(0, \frac{2}{3}, 1\right) \in P, \text{ il en résulte : } \frac{1}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } P : x + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0, \text{ ou encore } P : 2x + z - 1 = 0.$$

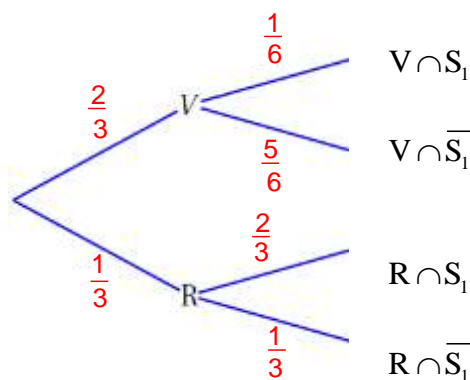
b) $2x_K + z_K - 1 = 0 + 1 - 2 = -1 \neq 0$ donc $K \notin P$.

$$\text{La distance de K au plan P est } d(K, P) = \frac{|-1|}{\sqrt{4+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{c) Le volume du tétraèdre OABK est } \mathcal{V}(\text{OABK}) = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OK}| = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

Exercice 4

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



$$\text{b. } p(S_1) = p(S_1 \cap V) + p(S_1 \cap R) = p(V) \cdot p(S_1 | V) + p(R) \cdot p(S_1 | R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé n fois de suite. On note S_n l'évènement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».

$$\text{a. } p(S_n) = p(S_n \cap V) + p(S_n \cap R) = p(V) \cdot p(S_n | V) + p(R) \cdot p(S_n | R) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers.

$$p_n = \frac{p(R \cap S_n)}{p(S_n)} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot 3 \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}.$$

$$\text{c. } p_n \geq 0,999 \Leftrightarrow \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \geq 0,999 \Leftrightarrow 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1 \leq \frac{1000}{999} \Leftrightarrow 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{999}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{1998} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{1998}\right) \Leftrightarrow n \ln 4 \geq \ln(1998) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(1998)}{\ln 4}.$$

Or $\frac{\ln(1998)}{\ln 4} \approx 5,48$, alors $n \geq 6$. D'où $n_0 = 6$