

Exercice 1: (5 points)

Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant, aux propositions suivantes :

Soit a un réel de l'intervalle de $]0,1[$, on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a^x + x \cdot \ln a$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
2. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = (\ln a) \cdot [a^x + 1]$.
3. a) $f(-2) > f(1)$.
b) Une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est $y = 2(\ln a)x + 1$.
4. Pour tout réel x , $a^x - (\ln a)x - 1 \geq 0$.

Exercice 2 : (6 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$.

1. Déterminer la solution sur \mathbb{R} de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2. On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} et telles que :
 $f(0) = \ln 2$ et pour tout réel x , $f(x) = e^{2x} \cdot g(x)$.
a) Calculer $g(0)$.
b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.
c) Démontrer que : f est solution de (E) si et seulement si pour tout réel x , $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.
d) En déduire l'expression de $g(x)$ puis celle de $f(x)$ sachant que f est solution de (E).

Exercice 3 : (9 points)

On dispose d'une boîte B et de deux urnes U_1 et U_2 .

B contient : cinq jetons numérotés de 1 à 5,

U_1 contient : une boule rouge et deux boules blanches,

U_2 contient : deux boules rouges et une boule blanche.

- 1- On tire au hasard un jeton de la boîte B , calculer la probabilité de l'événement

A : « le jeton tiré porte un numéro impair ».

2- Calculer la probabilité de chacun des événements :

C : « tirer une boule blanche de U_1 et simultanément deux boules rouges de U_2 »

D : « tirer simultanément deux boules de couleurs différentes de U_1 et une boule rouge de U_2 »

3- On considère l'épreuve (E) suivante :

On tire un jeton de B,

- Si on obtient un numéro impair, on tire une boule de U_1 et simultanément deux boules de U_2

- Sinon, on tire simultanément deux boules de U_1 et une boule U_2 .

Soit S l'événement « obtenir à l'issue de l'épreuve (E) deux boules rouges et deux seulement ».

a) On a tiré un jeton portant un numéro impair, calculer la probabilité de S.

b) On a tiré un jeton portant un numéro pair, calculer la probabilité de S.

c) En déduire que $p(S) = \frac{4}{9}$.

4- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, l'épreuve (E) est répétée n fois de suite en remettant à chaque fois le jeton tiré dans la boîte B et les boules tirées dans leurs urnes d'origine.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque série de n épreuves associe le nombre de fois à l'évènement S est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Quelle est la probabilité p_n pour que S soit réalisé au moins une fois à l'issue des n épreuves ?

c) Déterminer le plus petit entier n_0 pour que $p_n \geq 0,99$.