

<i>L. Regueb</i>	<i>Mathématiques</i>	<i>Classe : 4<sup>ème</sup> M</i>
<i>Prof : Salhi Noureddine</i>	<i>Devoir de Synthèse N°2</i>	<i>Le : 08/03/2013 D: 4h</i>

### Exercice1(3pts)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte .Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée .

1) La similitude indirecte dont la transformation complexe associée est  $z' = 2i\bar{z} + 3$

est d'axe la droite d'équation :

a)  $y = x - 1$

b)  $y = x + 1$

c)  $y = -x + 1$

2) La limite de  $\frac{x^2}{e^x - 1}$  quand  $x$  tend vers 0 est égale à :

a) 1

b)  $+\infty$

c) 0

3) Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

Si  $\int_1^2 (f(t) - 1)dt = 0$  , alors la valeur moyenne de  $f$  sur  $[1,2]$  est égale à :

a) 0

b) 1

c) 2

### Exercice2(5pts)

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  ,  $f(x) = x^3 e^{1-x^2}$ .

On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  .

a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$  .

c) Construire la courbe (C) .

2) Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx$  .

a) Calculer  $u_1$  .

b) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on a :  $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$  .

En déduire que  $(u_n)$  est convergente et trouver sa limite .

3)a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  ,  $u_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right) u_n - \frac{1}{2}$  .

b) En déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives ,  $x = 0$  et  $x = 1$  .

### Exercice 3 (6pts)

Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet principal A.

On pose  $(\widehat{AB, AC}) \equiv 2\alpha \ [2\pi]$  où  $\alpha$  est un réel de  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

On désigne par O le milieu de [BC] et par D le symétrique de A par rapport à O .

Soient I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC) .

1) Soit f la similitude directe qui transforme O en I et D en J .

a) Montrer que f a pour angle  $\alpha$  et pour rapport  $\cos(\alpha)$  .

b) Prouver que le centre de f est le point A .

2) On désigne par E le symétrique du point O par rapport au point I .

Montrer que  $f(B) = O$  et que  $f(C) = E$  .

3) Soit g la similitude indirecte telle que :  $g(B) = O$  et  $g(C) = E$  .

Déterminer le rapport de g et montrer que  $g(O) = I$  .

4) a) Montrer que  $g = S_{(OE)} \circ f$

b) Montrer que  $g(D) = A$  et  $g(A) = J$  .

5) Soit  $\Omega$  le centre de g .

a) Montrer que  $(g \circ g)(D) = J$  et en déduire que  $\Omega$  appartient à la droite (DJ) .

b) Montrer que  $\Omega$  appartient à la droite (BI) .

c) Construire le point  $\Omega$  .

### Exercice 4 (6pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère les ensembles des points  $M(x, y)$  suivants :

$$(H): x^2 - 4y^2 - 2x + 5 = 0 \quad ; \quad (P): 4y^2 + 2x - 5 = 0 .$$

1) a) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets et les asymptotes .

b) Montrer que (P) est une parabole dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice .

2) a) Construire (H) et (P) dans le même repère .

b) Vérifier que la droite T d'équation :  $x + 2\sqrt{5}y - 5 = 0$  est une tangente commune à (H) et (P)

au point  $A\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$  .

3) Pour tout  $x \geq 0$ , on pose :  $F(x) = \int_1^{e^x - e^{-x} + 1} \sqrt{4 + (t - 1)^2} dt$

a) Montrer que F est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et que pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $F'(x) = (e^x + e^{-x})^2$

b) Calculer  $F(0)$  et déduire l'expression de  $F(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$  .

c) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation :  $e^x - e^{-x} + 1 = \frac{5}{2}$  .

d) On désigne par  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (H) et les droites d'équations

respectives  $x = 1$ ,  $x = \frac{5}{2}$ . Montrer que  $\mathcal{A} = \frac{15}{8} + 2\ln(2)$  (u.a).

Exercice1

Indications :

Question n°	1	2	3
Réponse	a	c	b

1)  $z' = 2i\bar{z} + 3$  est la similitude indirecte

de rapport 2 , de centre  $\Omega(-1,-2)$  et d'axe la droite d'équation  $y = x - 1$  .

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$3) \int_1^2 (f(t) - 1)dt = 0 \Rightarrow \int_1^2 f(t)dt - \int_1^2 1 dt = 0 \Rightarrow \frac{1}{2-1} \int_1^2 f(t)dt = 1 \Rightarrow \bar{f} = 1$$

(où  $\bar{f}$  est la valeur moyenne de  $f$  sur  $[1,2]$  )

Exercice2

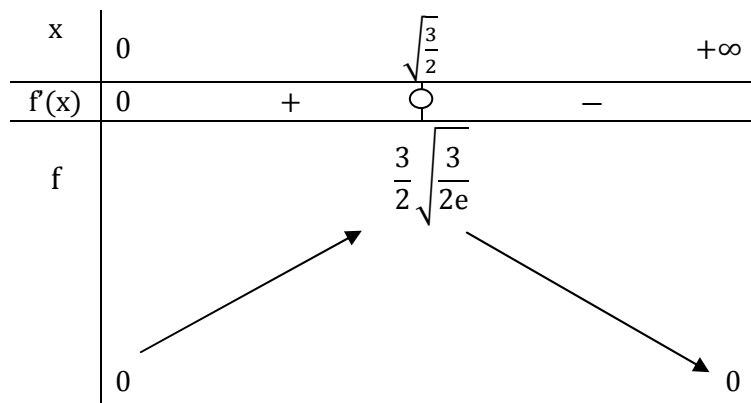
1)a) Soit  $x > 0$  ,  $f(x) = x^3 e^{1-x^2} > 0$  .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^3 e^{1-x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 \ln(x) + 1 - x^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 3 \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} - x \right) = +\infty(0 + 0 - \infty) = -\infty \end{aligned}$$

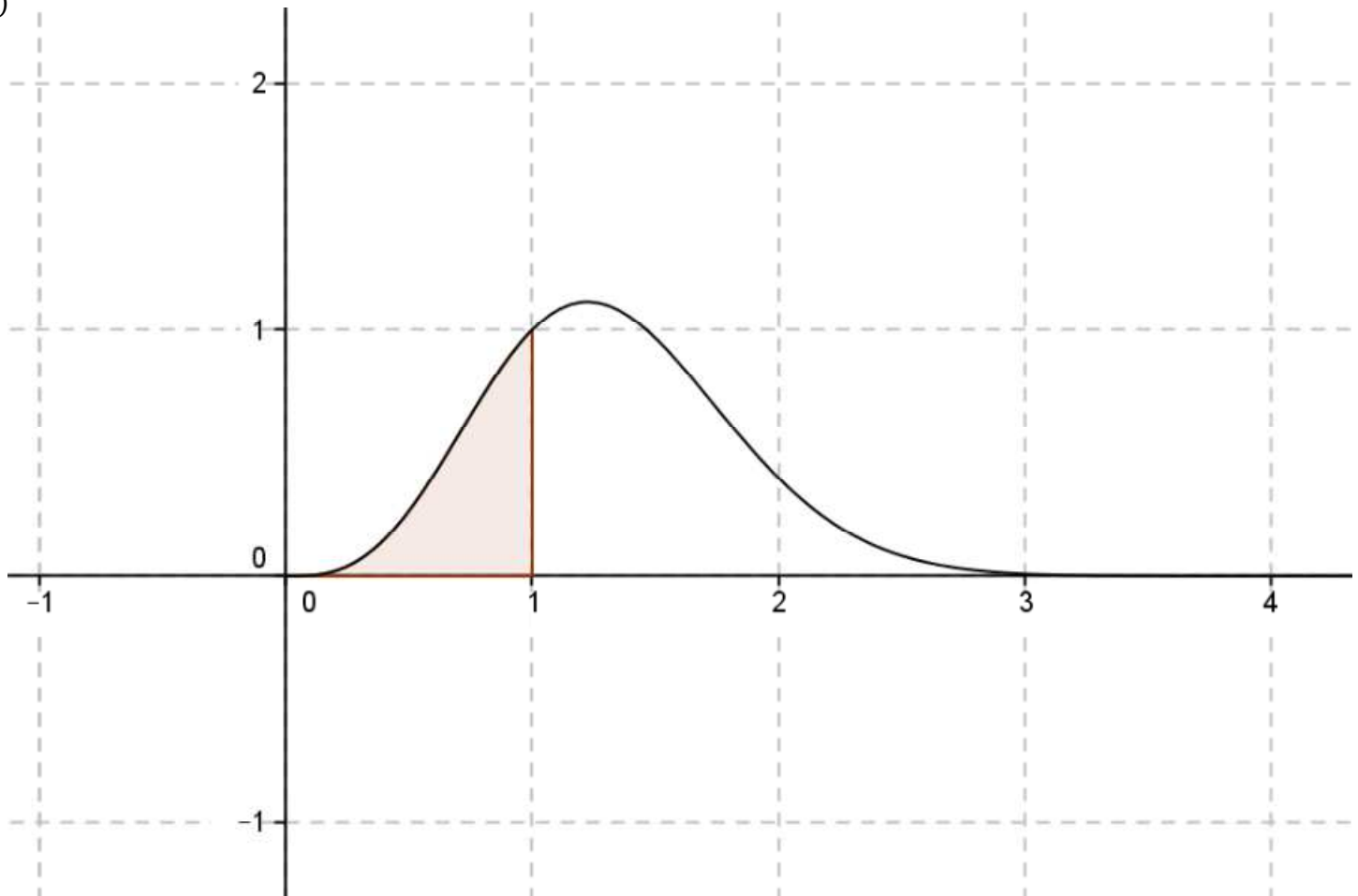
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

b)  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et  $f'(x) = x^2 e^{1-x^2} (3 - 2x^2)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{3}{2}}; \text{ car } x \in [0, +\infty[ .$$



c)



2)  $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx, n \in \mathbb{N}^*$

a)  $u_1 = \int_0^1 x e^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x e^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} [e^{1-x^2}]_0^1 = \frac{e-1}{2}$ .

b)  $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow e^0 \leq e^{1-x^2} \leq e^1$   
 $\Rightarrow x^n \leq x^n e^{1-x^2} \leq e x^n, n \in \mathbb{N}^*$

D'où  $\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx \leq \int_0^1 e x^n dx \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}, (n \in \mathbb{N}^*)$

On a:  $\begin{cases} \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}, (n \in \mathbb{N}^*) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0 \end{cases}$  alors  $\begin{cases} \text{la suite } (u_n) \text{ est convergente} \\ \text{et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \end{cases}$

3)a)  $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^{1-x^2} dx, n \in \mathbb{N}^*$

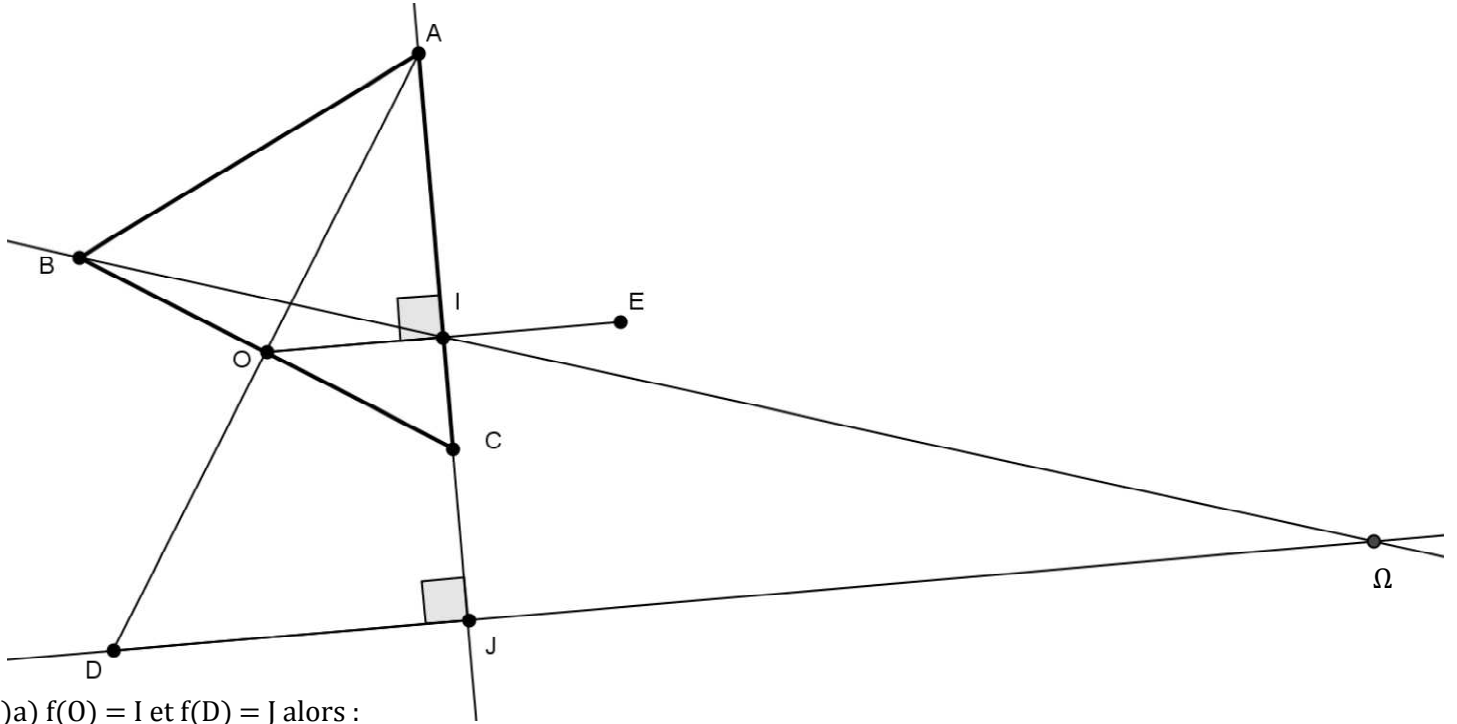
On pose:  $u(x) = x^{n+1} \quad u'(x) = (n+1)x^n$   
 $v(x) = x e^{1-x^2} \quad v'(x) = -x e^{1-x^2}$

Alors:  $u_{n+2} = \left[ \frac{-1}{2} x^{n+1} e^{1-x^2} \right]_0^1 + \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx = \left( \frac{n+1}{2} \right) u_n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}^*.$

b) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites  $x=0$  et  $x=1$ .

$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 e^{1-x^2} dx = u_3 = u_{1+2} = \frac{1+1}{2} u_1 - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}$  (u.a).

Exercice 3



1) a)  $f(O) = I$  et  $f(D) = J$  alors :

$f$  est de rapport  $\frac{IJ}{OD} = \frac{AI}{AO} = \cos(\alpha)$  et d'angle  $(\widehat{OD, IJ}) \equiv (\widehat{AO, AC}) \equiv \alpha [2\pi]$ .

b)  $(OI) \perp (AC)$  et  $(DJ) \perp (AC)$  donc  $(OI) \parallel (DJ)$

$$\text{on a : } \begin{cases} ADJ \text{ est rectangle en } J \\ O = A * D \\ (OI) \parallel (DJ) \\ I \in (A) \end{cases} \quad \text{donc} \quad I = A * J$$

$$O = A * D \Rightarrow f(O) = f(A) * f(D) \Rightarrow I = f(A) * J$$

En fin :  $\begin{cases} I = f(A) * J \\ I = A * J \end{cases}$  donc  $f(A) = A$  et par suite  $f$  est de centre  $A$ .

$$2) \text{ on a : } \begin{cases} \frac{AO}{AB} = \cos(\alpha) \\ (\widehat{AB, AO}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases} \quad \text{donc} \quad f(B) = O$$

$$O = B * C \Rightarrow f(O) = f(B) * f(C) \Rightarrow I = O * f(C)$$

$$\begin{cases} I = O * f(C) \\ I = O * E \end{cases} \quad \text{donc} \quad f(C) = E$$

3)  $g(B) = O$  et  $g(C) = E$  alors  $g$  est de rapport  $\frac{OE}{BC} = \cos(\alpha)$  car  $(f(B) = O \text{ et } f(C) = E \text{ donc } \frac{OE}{BC} = \cos(\alpha))$

$$O = B * C \Rightarrow g(O) = g(B) * g(C) = O * E = I.$$

$$4) a) (S_{(OE)} \circ f)(B) = S_{(OE)}(O) = O \quad , \quad (S_{(OE)} \circ f)(C) = S_{(OE)}(E) = E$$

$(S_{(OE)} \circ f)$  et  $g$  sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts  $B$  et  $C$  alors elles sont égales d'où  $g = S_{(OE)} \circ f$ .

$$b) g(D) = (S_{(OE)} \circ f)(D) = S_{(OE)}(J)$$

$$O = A * D \Rightarrow f(O) = f(A) * f(D) \Rightarrow I = A * J$$

$$\text{on a : } \begin{cases} I = A * J \\ I = O * E \\ (OE) \perp (IJ) \end{cases} \text{ alors } S_{(OE)}(J) = A, \text{ d'où } g(D) = A.$$

$$g(A) = (S_{(OE)} \circ f)(A) = S_{(OE)}(A) = J$$

5)a)  $(g \circ g)(D) = g(A) = J$ ,  $g \circ g$  est l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\cos^2(\alpha)$  et  $(g \circ g)(D) = J$  alors  $\Omega \in (DJ)$

b)  $(g \circ g)(B) = g(O) = I$  alors  $\Omega \in (BI)$ .

c)  $\{\Omega\} = (DJ) \cap (BI)$ .

### Exercice 4

$$(H): x^2 - 4y^2 - 2x + 5 = 0 \quad ; \quad (P): 4y^2 + 2x - 5 = 0.$$

$$1)a) (H): x^2 - 4y^2 - 2x + 5 = 0$$

$$(H): -\frac{(x-1)^2}{2^2} + y^2 = 1, \text{ donc (H) est une hyperbole de centre } \Omega(1, 0).$$

Si M est un point de coordonnées  $(X, Y)$  dans le repère  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  et de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{On a : } \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$$

<u>Dans le repère <math>(\Omega, \vec{i}, \vec{j})</math></u>	<u>Dans le repère <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math></u>
$(H): -\frac{X^2}{2^2} + Y^2 = 1$	$(H): -\frac{(x-1)^2}{2^2} + y^2 = 1$
Les sommets de (H) sont : $S(0, 1)$ et $S'(0, -1)$	Les sommets de (H) sont : $S(1, 1)$ et $S'(1, -1)$
Les foyers de (H) sont : $F(0, \sqrt{5})$ et $F'(0, -\sqrt{5})$	Les foyers de (H) sont : $F(1, \sqrt{5})$ et $F'(1, -\sqrt{5})$
Les asymptotes de (H) sont :	Les asymptotes de (H) sont :
$\Delta_1: Y = \frac{1}{2}X$ et $\Delta_2: Y = -\frac{1}{2}X$	$\Delta_1: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ et $\Delta_2: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

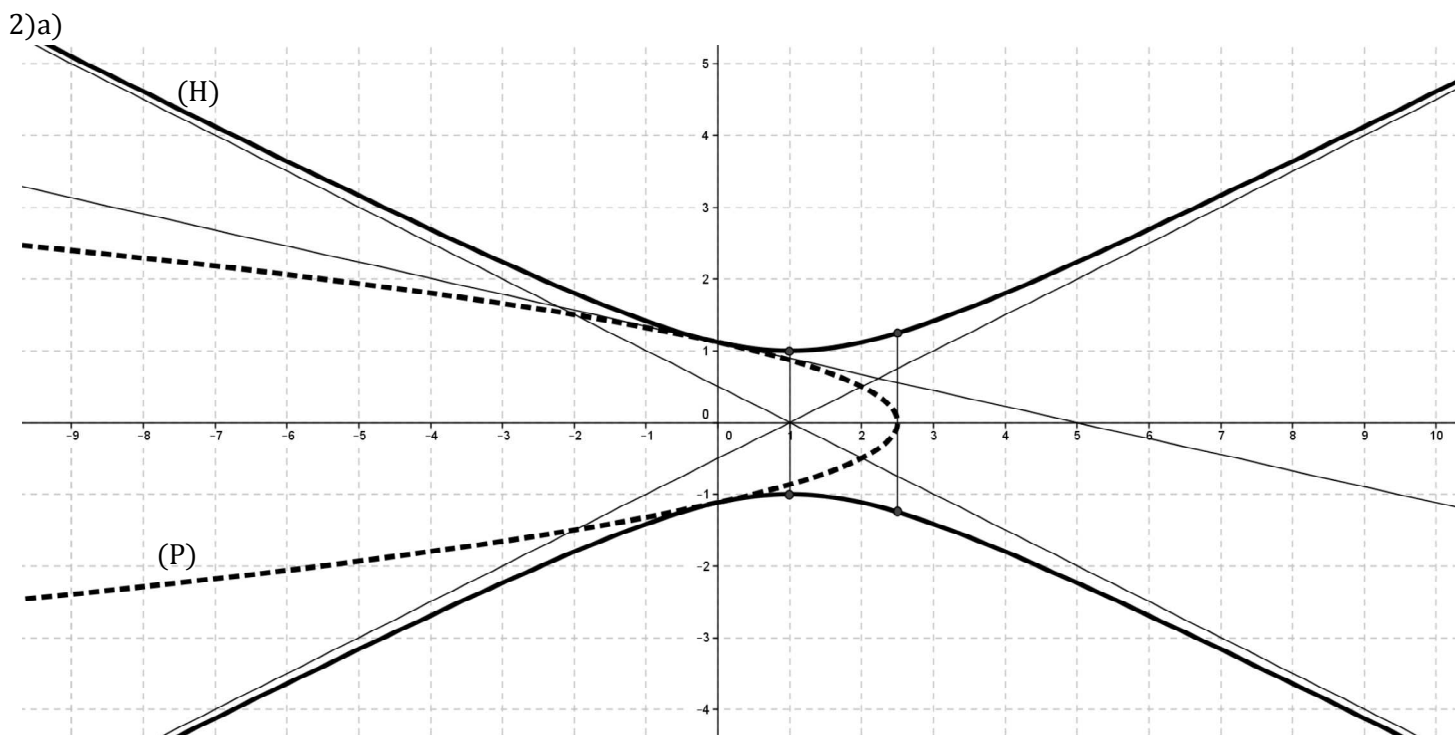
$$b) (P): 4y^2 + 2x - 5 = 0$$

$$(P): y^2 = -2 \times \frac{1}{4} \left(x - \frac{5}{2}\right), \text{ donc (P) est une parabole de sommet } I\left(\frac{5}{2}, 0\right) \text{ et de paramètre } \frac{1}{4}.$$

Si M est un point de coordonnées  $(X, Y)$  dans le repère  $(I, \vec{i}, \vec{j})$  et de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{On a : } \begin{cases} X = x - \frac{5}{2} \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \frac{5}{2} \\ y = Y \end{cases}$$

<u>Dans le repère <math>(I, \vec{i}, \vec{j})</math></u>	<u>Dans le repère <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math></u>
$(P): Y^2 = -2 \times \frac{1}{4} X$	$(P): y^2 = -2 \times \frac{1}{4} \left(x - \frac{5}{2}\right)$
(P) est de sommet $I(0,0)$	(P) est de sommet $I\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
(P) est de foyer $F_1\left(-\frac{1}{8}, 0\right)$	(P) est de foyer $F_1\left(\frac{19}{8}, 0\right)$
(P) est de directrice ; $D: X = \frac{1}{8}$	(P) est de directrice ; $D: x = \frac{21}{8}$



b)  $A\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ , les coordonnées de A vérifient l'équation  $x^2 - 4y^2 - 2x + 5 = 0$  donc  $A \in (H)$

et les coordonnées de A vérifient l'équation  $4y^2 + 2x - 5 = 0$  donc  $A \in (P)$ .

On désigne par  $T_H$  la tangente à (H) en A et  $T_P$  la tangente à (P) en A.

Dans le repère  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ , le point A est de coordonnées  $\left(-1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ .

Dans le repère  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$$T_H: -\frac{-X}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}Y = 1 \Rightarrow T_H: X + 2\sqrt{5}Y - 5 = 0$$

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$T_H: x - 1 + 2\sqrt{5}y - 4 = 0 \Rightarrow T_H: x + 2\sqrt{5}y - 5 = 0 \text{ d'où } T_H = T$$

Dans le repère  $(I, \vec{i}, \vec{j})$ , le point A est de coordonnées  $\left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ .

Dans le repère  $(I, \vec{i}, \vec{j})$

$$T_P: Y \times \frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{4}\left(X - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow T_H: X + 2\sqrt{5}Y - \frac{5}{2} = 0$$

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$T_P: x - \frac{5}{2} + 2\sqrt{5}y - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow T_P: x + 2\sqrt{5}y - 5 = 0 \text{ d'où } T_P = T$$



$$3) F(x) = \int_1^{e^x - e^{-x} + 1} \sqrt{4 + (t-1)^2} dt, \quad x \geq 0$$

a) La fonction  $x \mapsto e^x - e^{-x} + 1$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et de plus la fonction  $t \mapsto \sqrt{4 + (t-1)^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$ .

$$F'(x) = \sqrt{4 + (e^x - e^{-x})^2} = (e^x + e^{-x})\sqrt{e^{2x} + e^{-2x} + 2} = (e^x + e^{-x})\sqrt{(e^x + e^{-x})^2} = (e^x + e^{-x})^2$$

$$b) F(0) = \int_1^1 \sqrt{4 + (t-1)^2} dt = 0$$

Soit  $x \geq 0$ ,  $F'(x) = (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$ , alors pour tout  $x \geq 0$  on a :

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x + c, \text{ or } F(0) = 0 \text{ donc } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

D'où pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x$ .

$$c) e^x - e^{-x} + 1 = \frac{5}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ on pose : } t = e^x$$

$$e^x - e^{-x} + 1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ ou } t = \frac{-1}{2} < 0 \text{ impossible car } t = e^x > 0$$

$t = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$  donc l'équation  $e^x - e^{-x} + 1 = \frac{5}{2}$  admet une seule solution dans  $\mathbb{R}$ ,

qui est  $x = \ln(2)$ .

$$d) H: 4y^2 = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow H: y^2 = \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 5)$$

On pose  $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x + 5}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; on a :  $H = (C_h) \cup (C_{-h})$ , (courbes de  $h$  et  $-h$ )

$(C_h)$  et  $(C_{-h})$  sont symétriques par rapport à l'axe  $(Ox)$ . Alors :

$$\mathcal{A} = 2 \int_1^{\frac{5}{2}} h(x) dx = \int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx = \int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx = F(\ln(2))$$

$$\mathcal{A} = \left[ \frac{1}{2}e^{2\ln(2)} - \frac{1}{2}e^{-2\ln(2)} + 2\ln(2) \right] = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 2\ln(2) = \frac{15}{8} + 2\ln(2) \quad (\text{u. a})$$