Etudes des fonctions

Soit f une fonction, D_f son domaine de définition et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Notation : ∞ remplace $+\infty$ ou $-\infty$)

Points d'inflexion :

f deux fois dérivable sur I et $x_0 \in I$.

Si $f''(x)$ s'annule en x_0 en changeant de signe alors $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

Parité :

- f est paire $\Leftrightarrow \forall\ x \in D_f$ on a $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
- f est impaire $\Leftrightarrow \forall\ x \in D_f$ on a $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

❖ Si f est paire ou impaire, le domaine d'étude est réduit à : $D_f \cap [0,+\infty[$.

❖ Si f est paire alors $\mathscr{C}$ présente une symétrie par rapport à l'axe $(O,\vec{j})$.

❖ Si f est impaire alors $\mathscr{C}$ présente une symétrie par rapport à l'origine du repère.

Périodicité :

- f est périodique de période T $\Leftrightarrow \forall x \in D_f$, on a $\begin{cases} x + T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

❖ Si f est de période T, le domaine d'étude est réduit à un intervalle d'amplitude T contenu dans D_f.

Axe de symétrie :

$\Delta : x = a$ est un axe de symétrie pour $\mathscr{C} \Leftrightarrow \forall\ x \in D_f$ on a $\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

Centre de symétrie :

$A(a,b)$ est un centre de symétrie pour $\mathscr{C} \Leftrightarrow \forall\ x \in D_f$ on a $\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$

Branches infinies :

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ Alors $\Delta : x = a$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$.
- Si $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = a$ Alors $\Delta : y = a$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$.
- Si $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$ Alors on calcule $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x}$

❖ Si $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Alors $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$.

❖ Si $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

Alors $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$.

❖ Si $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ Alors on calcule $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - ax]$, $(a \neq 0)$

★ Si $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - ax] = b$

Alors $\Delta : y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.

★ Si $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - ax] = \infty$

Alors $\mathscr{C}$ admet une bronche parabolique de direction $\Delta : y = ax$.

Remarque :

$\Delta : y = ax + b$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$