Formes indéterminées

Quand on calcule des limites, les formes suivantes sont indéterminées :

Formes indéterminées		
$0 \times \infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\dfrac{0}{0}$
$+\infty - \infty$		

Indéterminations levées par le cours

Polynômes, fonctions rationnelles

• La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
• La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Nombres dérivés

Les limites suivantes sont fournies dans le cours. Elles fournissent toutes un nombre dérivé.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1 \text{ ou } \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1.$$

Théorèmes de croissances comparées

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$. Pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ et pour tout réel $a>1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=+\infty$.
• $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$. Pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ et pour tout réel $a>1$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^na^x=0$.
• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$. Pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$.
• $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln(x)=0$. Pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^n\ln(x)=0$.

Quelques techniques usuelles pour lever des indéterminations

Mise en facteur du terme prépondérant

Exemple 1. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^3-1-e^x$.

– On classe les termes **par ordre décroissant de prépondérance** : $-e^x+x^3-1$
– On met **le prépondérant en facteur** : $-e^x\left(1-\dfrac{x^3}{e^x}+\dfrac{1}{e^x}\right)$
– Puisqu'on a mis le terme prépondérant en facteur, la parenthèse commence par 1 et continue par des termes tendant vers 0 : $\dfrac{x^3}{e^x}=\dfrac{1}{e^x/x^3}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$... La parenthèse tend donc vers 1 et l'expression vers $-\infty$.

Exemple 2. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}}$.

Limite en $+\infty$. Pour tout réel $x\neq 0$, $\dfrac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}}=\dfrac{x^2-1}{e^x+1+e^{-x}}=\dfrac{x^2}{e^x}\times\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+e^{-x}+e^{-2x}}=\dfrac{1}{e^x/x^2}\times\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+e^{-x}+e^{-2x}}$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim_{X\to-\infty}e^X=0$ et de même $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$. D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+e^{-x}+e^{-2x}}=1$.
D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x/x^2}=0$.

Finalement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}}=0$. La mise en facteur des prépondérants a permis de faire apparaître le face à face $\dfrac{e^x}{x^2}$ en $+\infty$.

Limite en $-\infty$. Pour tout réel $x\neq 0$, $\dfrac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}}=\dfrac{x^2-1}{e^{-x}+1+e^x}=\dfrac{x^2}{e^{-x}}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+e^x+e^{2x}}=x^2e^x\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+e^x+e^{2x}}$,

et on trouve $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}}=0$.

Exemple 3. Trouver $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + x} - x$.

On met le prépondérant en facteur dans $\sqrt{4x^2 + x}$ pour comprendre que $\sqrt{4x^2 + x}$ vaut environ $\sqrt{4x^2} = 2x$ quand x est grand et donc que l'expression vaut environ x.

Pour $x > 0$, $\sqrt{4x^2 + x} - x = \sqrt{4x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - x = 2x\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - x = x\left(2\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - 1\right) \ldots \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + x} - x = +\infty$.

Utilisation d'une quantité conjuguée

Exemple 4. Trouver $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$.

Quand x est grand, $\sqrt{x^2 + x}$ vaut environ $\sqrt{x^2} = x$. Aucun des termes $\sqrt{x^2 + x}$ et x ne va l'emporter devant l'autre. Il faut maintenant voir plus explicitement le face à face $\sqrt{x^2} - x = x - x$ et pour cela élever au carré $\sqrt{x^2 + x}$ et x. C'est le but de la multiplication du numérateur et du dénominateur par la quantité conjuguée.

Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2 + x} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \dfrac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$.

L'indétermination était $+\infty - \infty$. Elle est maintenant $\dfrac{\infty}{\infty}$. La mise en facteur des prépondérants au numérateur et au dénominateur permet alors de voir que l'expression vaut environ $\dfrac{x}{2x}$.

Pour $x > 0$, $\dfrac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \dfrac{x}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \ldots \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \dfrac{1}{2}$.

Utilisation d'un taux d'accroissement

Exemple 5. Trouver $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x - x^2}$.

L'indétermination est $\dfrac{0}{0}$ qui est l'indétermination typique dans les calculs de nombre dérivé $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et doit donc éveiller les soupçons. Un certain stock de ces nombres dérivés sont fournis une bonne fois pour toutes en cours. Ici, on utilise $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$ qui donne la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ en 0 (ou la dérivée de $x \mapsto \ln(x)$ en 1).

Pour $x > -1$ et $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $\dfrac{\ln(1 + x)}{x - x^2} = \dfrac{\ln(1 + x)}{x} \times \dfrac{1}{1 - x} \ldots \lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x - x^2} = 1$.

Exemple 6. Trouver $\lim_{x \to \pi/6} \dfrac{2\sin(x) - 1}{6x - \pi}$.

De nouveau $\dfrac{0}{0}$. On fait apparaître le taux d'accroissement de la fonction sinus en $\dfrac{\pi}{6}$.

Pour $x \neq \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{2\sin(x) - 1}{6x - \pi} = \dfrac{2}{6} \times \dfrac{\sin(x) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}$.

Quand x tend vers $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}$ tend vers $\sin'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ldots \lim_{x \to \pi/6} \dfrac{2\sin(x) - 1}{6x - \pi} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.