

Géométrie dans l'espace

Barycentres

Soient A, B, C, \dots des points de l'espace et a, b, c, \dots des réels tels que $a + b + c \neq 0$.

- Il existe un point G et un seul tel que

$$a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} + \dots = \vec{0}$$

G est le barycentre des points pondérés $A(a), B(b), C(c), \dots$ et se note $\text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$.

- Pour tout point M de l'espace, on a

$$\vec{MG} = \frac{1}{a+b+c+\dots} (a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} + \dots) \text{ ou aussi } a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} + \dots = (a+b+c+\dots)\vec{MG}.$$

- Si de plus on se donne un repère de l'espace, les coordonnées de G sont

$$G \left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C + \dots}{a+b+c+\dots}, \frac{ay_A + by_B + cy_C + \dots}{a+b+c+\dots}, \frac{az_A + bz_B + cz_C + \dots}{a+b+c+\dots} \right).$$

Propriétés du barycentre

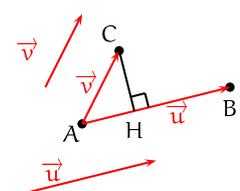
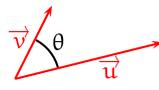
- Pour tout réel k non nul, $\text{bar}(A(a), B(b), C(c), \dots) = \text{bar}(A(ka), B(kb), C(kc), \dots)$.
- (Barycentre partiel) Si $a+b \neq 0$ et si $G = \text{bar}(A(a), B(b))$, alors $\text{bar}(A(a), B(b), C(c), \dots) = \text{bar}(G(a+b), C(c), \dots)$.

Caractérisation barycentrique de différents sous-ensembles de l'espace

- Soient A et B deux points distincts. Tout barycentre de A et B appartient à la droite (AB) . Réciproquement, tout point de la droite (AB) est un barycentre de A et de B . La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B .
- Soient A et B deux points distincts. Tout barycentre à coefficients positifs de A et B appartient au segment $[AB]$. Réciproquement, tout point du segment $[AB]$ est un barycentre de A et de B affectés de coefficients positifs. Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs.
- Soient A, B et C trois points non alignés. Tout barycentre de A, B et C appartient au plan (ABC) . Réciproquement, tout point du plan (ABC) est un barycentre de A, B et C . Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres de A, B et C .
- Soient A, B et C trois points non alignés. Tout barycentre à coefficients positifs de A, B et C appartient au domaine de frontière le triangle ABC . Réciproquement, tout point du domaine de frontière le triangle ABC est un barycentre de A, B et C affectés de coefficients positifs. Le domaine de frontière le triangle ABC est l'ensemble des barycentres de A, B et C affectés de coefficients positifs.

Produit scalaire

Différentes expressions du produit scalaire

 <p> $\vec{u} = \vec{AB}$ $\vec{v} = \vec{AC}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH}.$ </p>	 <p> Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos \theta.$ </p>	<p>Si, dans un repère orthonormal \mathcal{R}, le vecteur \vec{u} a pour coordonnées (x, y, z) et le vecteur \vec{v} a pour coordonnées (x', y', z'), alors</p> $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$
---	--	---

Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} et tout réel λ , on a

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$.
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- Pour tout vecteur \vec{u} , $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$.

Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur \vec{u} est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Si dans un repère orthonormé \mathcal{R} , \vec{u} a pour coordonnées (x, y, z) alors,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Si dans un repère orthonormé \mathcal{R} , les points A et B ont pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) alors, la distance de A à B est

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$