

# Limites de suites et de fonctions

## Limites de suites

Soit  $u$  une suite réelle.

- Soit  $\ell$  un réel. La suite  $u$  a pour limite  $\ell$  si et seulement si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- La suite  $u$  a pour limite  $+\infty$  si et seulement si tout intervalle de la forme  $]A, +\infty[$  avec  $A$  réel contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- La suite  $u$  a pour limite  $-\infty$  si et seulement si tout intervalle de la forme  $] -\infty, A[$  avec  $A$  réel contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Quand la suite  $u$  a une limite réelle, on dit que la suite  $u$  converge. Dans le cas contraire, on dit que la suite  $u$  diverge.

Si  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont trois suites réelles telles que, pour tout entier naturel  $n$  à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et si les suites  $u$  et  $w$  convergent vers une limite réelle commune  $\ell$ , alors la suite  $v$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ .

**Théorème.** Toute suite réelle croissante et majorée converge. Toute suite réelle décroissante et minorée converge. Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers  $+\infty$ . Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers  $-\infty$ .

**Théorème.** Soient  $u$  et  $v$  deux suites telles que, pour tout entier naturel  $n$  à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$ . Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ . Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**Suites adjacentes.** Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles.  $u$  et  $v$  sont deux suites adjacentes si et seulement si l'une des deux croît, l'autre décroît et leur différence tend vers 0.

**Théorème.** Deux suites adjacentes convergent et ont mêmes limites.

## Limites de fonctions

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]A, +\infty[$  et  $\ell$  un réel.

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand.
- On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si tout intervalle de la forme  $]A, +\infty[$  avec  $A$  réel contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand.
- On dit que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si tout intervalle de la forme  $] -\infty, A[$  avec  $A$  réel contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand.

On a des énoncés analogues et intuitifs pour toutes les autres situations.

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a$  une borne de  $I$  ( $a$  réel ou infini).

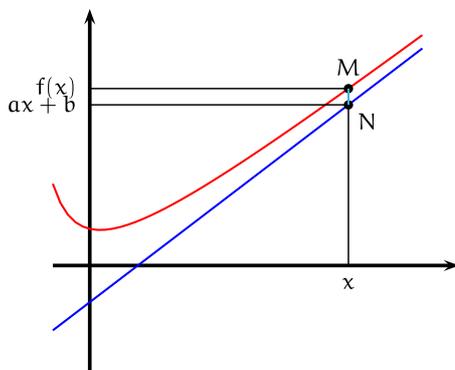
Si  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont trois fonctions définies sur  $I$  telles que, pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  et si les fonctions  $f$  et  $h$  ont vers une limite réelle commune  $\ell$  en  $a$ , alors la fonction  $g$  a une limite réelle en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ .

**Théorème.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a$  une borne de  $I$  ( $a$  réel ou infini).

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$  telles que, pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \leq g(x)$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

**Droite asymptote à une courbe.**



Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]A, +\infty[$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $(D)$  la droite d'équation  $y = ax + b$ .

Soit  $M$  le point de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $x$ . Donc  $M(x, f(x))$ .

Soit  $N$  le point de  $(D)$  de même abscisse  $x$ . Donc  $N(x, ax + b)$ .

$$y_M - y_N = f(x) - (ax + b).$$

On dit que la droite d'équation  $y = ax + b$  est **asymptote** à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$  si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Si pour tout réel  $x$  de  $I$  on peut écrire  $f(x) = ax + b + g(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$ .