

## CHAPITRE : SUITE REELLE

### A. Démonstration par récurrence.

#### Méthode

Soit  $P$  une propriété dépendant d'un entier naturel  $n$ , et  $n_0$  un entier naturel fixé.  
Pour démontrer que  $P$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$  on procède en trois étapes.

1. Initialisation de la propriété : On vérifie que la propriété  $P$  est vraie pour l'entier  $n_0$ .
2. Caractère héréditaire de la propriété On démontre que si la propriété  $P$  est vraie pour un entier  $n \geq n_0$  (hypothèse de récurrence) alors elle est vraie pour l'entier  $n + 1$ .
3. Conclusion On peut conclure, d'après l'axiome de récurrence, que la propriété  $P$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

### B. Quelques rappels sur les suites

1. Définition d'une suite Une suite est une fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels ou à partir du rang  $n_0$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$ .
2. Deux façons de définir une suite
  - Par la donnée explicite de  $U_n$  en fonction de  $n$

#### Exemples

- $U_n = \frac{n!}{n-3}$  définie à partir du rang 4.
- $U_n = f(n)$  avec  $f(n) = \sqrt{x+3}$  définie sur  $\mathbb{N}$ . On dit alors que  $U_n$  est une suite fonctionnelle.
  - Par la donnée du premier terme et d'une relation de récurrence

Exemple : la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $f(n) = \sqrt{x+3}$  définie par  $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$

Remarque : cette suite récurrente est telle que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = f(U_n)$  avec  $f(x) = 2x - 3$

### C. Sens de variation d'une suite

#### 1) Définition

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$ . On dit que  $(U_n)$  est

- croissante si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} \geq U_n$
- décroissante si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} \leq U_n$
- monotone si elle est soit croissante soit décroissante
- constante si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = U_n$ .

#### Remarques

- on adaptera les définitions si la suite est définie à partir du rang  $n_0$
- la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_n = (-1)^n$  n'est pas monotone : elle prend alternativement les valeurs  $+1$  et  $-1$ .

## Méthodes d'étude de la monotonie d'une suite

- Pour déterminer le sens de variation d'une suite  $(U_n)$  définie à partir du rang  $n_0$  on peut utiliser l'une des méthodes suivantes en choisissant la mieux adaptée
- Montrer que, pour tout  $n \geq n_0$ , la différence  $U_{n+1} - U_n$  garde le même signe, éventuellement à l'aide d'une démonstration par récurrence (en particulier pour les suites du type  $U_{n+1} = f(U_n)$  dans le cas où  $f$  est croissante sur un intervalle contenant tous les termes  $U_n$ )
- Si la suite est à termes strictement positifs, étudier la place du quotient  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$  par rapport à 1.
- La suite  $(U_n)$  est alors croissante si pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$  ; décroissante si  $0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$
- pour les suites (fonctionnelles) du type  $U_n = f(n)$ , si  $f$  est monotone sur  $[n_0; +\infty[$  alors la suite  $(U_n)$  est monotone et varie dans le même sens que  $f$  (Attention : condition suffisante mais pas nécessaire !)

### D. Suite majorée, minorée, bornée.

#### 1) Définitions

Une suite  $(U_n)$  définie à partir du rang  $n_0$  est :

- majorée s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $n \geq n_0, U_n \leq M$  ;
- minorée s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout  $n \geq n_0, U_n \geq m$
- bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

- Une suite croissante est minorée par son premier terme.
- Une suite décroissante est majorée par son premier terme

2) **Théorème** Pour les suites du type  $U_n = f(n)$  si  $f$  est bornée sur  $[n_0; +\infty[$  alors la suite  $(U_n)$  l'est aussi.

### E. Convergence des suites monotones.

#### Théorème

Toute suite croissante et majorée converge.  
Toute suite décroissante et minorée converge.

### F. Suites adjacentes.

#### 1) Définition

Deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont dites adjacentes si l'une d'elles est croissante, l'autre décroissante, et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$ .

2)

#### Théorème

Si deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  sont adjacentes,  $(U_n)$  étant la suite croissante et  $(V_n)$  la suite décroissante, alors :

- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_n \leq V_n$
- Les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  convergent vers la même limite  $L$
- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_n \leq L \leq V_n$

Exemple classique : ces deux suites sont adjacentes et convergent vers =

$$2,7182818 \left\{ \begin{array}{l} U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \\ V_n = U_n + \frac{1}{n!} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} + \frac{1}{n!} \end{array} \right.$$

### 3) Théorèmes d'existence de limite

Si une suite  $(U_n)$  est croissante et majorée, alors elle converge. On ne sait rien de sa limite. Si une suite  $(U_n)$  est décroissante et minorée, alors elle converge

### 4) Théorèmes sur les limites

#### Composée :

Soit  $f$  définie sur  $I$ .  $(V_n)$  est une suite dont tous les termes appartiennent à  $I$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = b$  et si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$  alors,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(V_n) = c$

### 5) Suite Arithmétique et suite géométrique :

Type de la suite	Forme générale	Somme	Limites
Suite Arithmétique	$U_{n+1} = U_n + r$ $U_n = U_0 + nr$ $U_p = U_q + (p - q)r$ $p \geq q$	$\sum_{i=0}^n U_i = (n + 1) \times U_0 + r \times \frac{n \times (n + 1)}{2}$	Si $r = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = r$ Si $r > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = +\infty$ Si $r < 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = -\infty$
Suite géométrique	$V_{n+1} = qV_n$ $V_n = q^n V_0$ $V_p = q^{n-p} V_q$ $n \geq p$	Si $q = 1$ $\sum_{i=0}^n V_i = (n + 1) \times V_0$ Si $q \neq 1$ $\sum_{i=0}^n V_i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \times V_0$	Si $ q  < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ Si $ q  \geq 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ Si $q < -1$ La limite n'existe pas

Dans ce tableau:

- Les réels  $r$  et  $q$  sont les raisons respectifs de  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Les réels  $U_0$  et  $V_0$  sont les premiers termes respectifs de  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$

## 6) Récurrence d'ordre 1

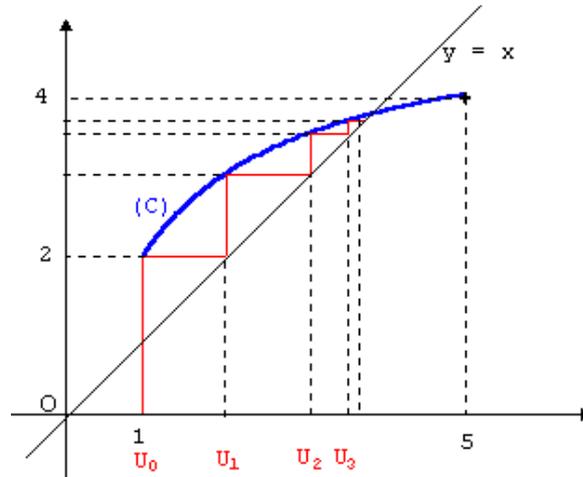
Soit  $(U_n)$  une suite définie de manière récurrente par :

$$\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Il faut étudier le sens de variations de  $f$ . Si  $f$

est croissante sur  $I$ , si  $f(I) \subset I$ , alors, la suite  $(U_n)$  est monotone. Si de plus l'équation  $f(x) = x$  admet une solution dans  $I$ , alors c'est la limite

de la suite  $(U_n)$



## 7) Et pour finir :

Dans l'exemple ci dessus, on a tracé la courbe de  $f$  et la droite d'équation  $y = x$ . Ces deux courbes se coupent en un point d'abscisse inférieure à 4. Si on prend  $u_0$  sur  $(Ox)$ , le point d'abscisse  $u_0$  de  $C_f$  a comme ordonnée  $U_1 = f(u_0)$ . On projette alors ce point sur la droite d'équation  $y = x$  puis sur  $(Ox)$ . On a donc maintenant  $u_1$  sur  $(Ox)$ . On réitère le processus et on visualise ainsi  $U_2$ ;  $U_3$  et  $U_4$ . On peut avoir l'intuition que la suite converge vers le réel solution de l'équation  $x = f(x)$ . Attention, on voit l'importance du premier terme. Si  $u_0$  est supérieur à 4, il est clair que la suite tend vers l'infini.

Un deuxième exemple est fourni avec une fonction décroissante  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ; on définit  $U_{n+1} = f(U_n)$  et  $U_0 = 1$

