

# Sections planes de surfaces

Pour écrire chaque équation cartésienne, l'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

## I - Les sphères

### • Définition d'une sphère

Soient  $\Omega$  un point de l'espace et  $R$  un réel strictement positif.  
La sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\Omega M = R$ .

### • Equation cartésienne d'une sphère

Soient  $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$  un point de l'espace et  $R$  un réel strictement positif.  
Une équation cartésienne de la sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  est  
$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2.$$

(Equation obtenue en passant aux coordonnées dans l'égalité  $\Omega M^2 = R^2$ ).

### • Intersection d'une sphère et d'un plan

Soient  $\Omega$  un point de l'espace et  $R$  un réel strictement positif.  
Soient  $\mathcal{P}$  un plan et  $\mathcal{S}$  la sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ .  
On note  $d$  la distance de  $\Omega$  au plan  $\mathcal{P}$ .

- Si  $d > R$ , l'intersection de  $\mathcal{S}$  et de  $\mathcal{P}$  est vide.
- Si  $d = R$ , l'intersection de  $\mathcal{S}$  et de  $\mathcal{P}$  est un point. Le plan  $\mathcal{P}$  est alors tangent à  $\mathcal{S}$  en ce point.
- Si  $d < R$ , l'intersection de  $\mathcal{S}$  et de  $\mathcal{P}$  est un cercle de rayon  $\sqrt{R^2 - d^2}$ .  
Le centre de ce cercle est le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur  $\mathcal{P}$ .

## II- Les cylindres de révolution

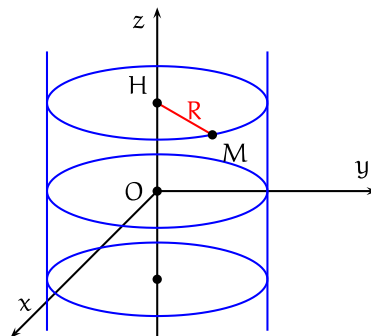
### • Définition d'un cylindre de révolution

Soient  $\mathcal{D}$  une droite, et  $R$  un réel strictement positif.  
Le cylindre de révolution d'axe  $\mathcal{D}$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :  
 $MH = R$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ .

### • Equation cartésienne d'un cylindre de révolution d'axe $(Oz)$

Soit  $R$  un réel strictement positif.  
Une équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $R$  est  
$$x^2 + y^2 = R^2.$$

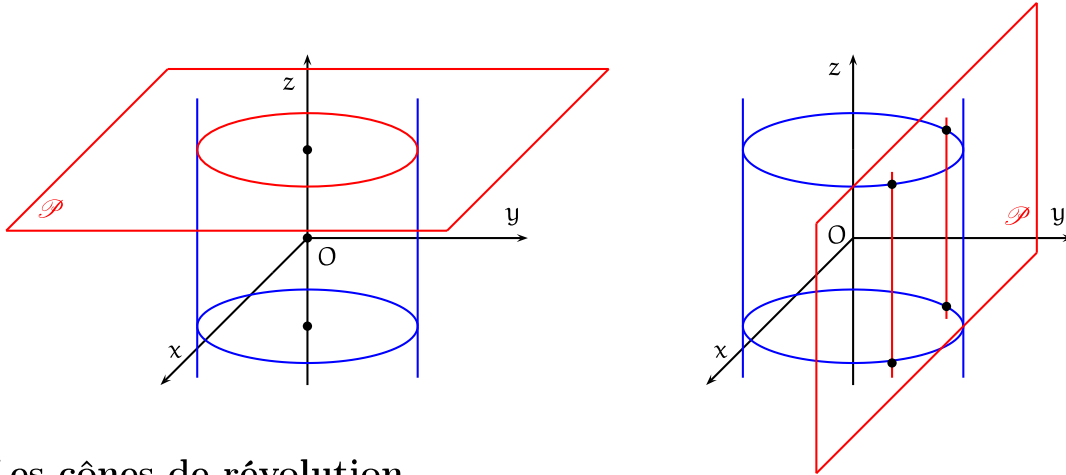
(Equation obtenue en passant aux coordonnées dans l'égalité  $HM^2 = R^2$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(Oz)$ ).



• Intersection d'un cylindre de révolution d'axe (Oz) et d'un plan parallèle au plan (xOy) ou à l'axe (Oz)

Soit  $R$  un réel strictement positif. Soient  $\mathcal{C}$  le cylindre d'axe (Oz) et de rayon  $R$  et  $\mathcal{P}$  un plan.

- Si  $\mathcal{P} \parallel (xOy)$ , l'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{P}$  est un cercle de rayon  $R$ .
- Si  $\mathcal{P} \parallel (Oz)$ , l'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{P}$ , si elle n'est pas vide, est une paire de droites parallèles à (Oz).



### III - Les cônes de révolution

• Définition d'un cône de révolution

Soient  $\mathcal{D}$  une droite,  $S$  un point de  $\mathcal{D}$  et  $\alpha$  un réel appartenant à  $]0, \pi[$ .

Le cône de révolution d'axe  $\mathcal{D}$ , de sommet  $S$  et d'angle au sommet  $\alpha$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :

- ou bien  $M = S$ ,
- ou bien  $M \neq S$  et  $\widehat{MSH} = \frac{\alpha}{2}$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ .

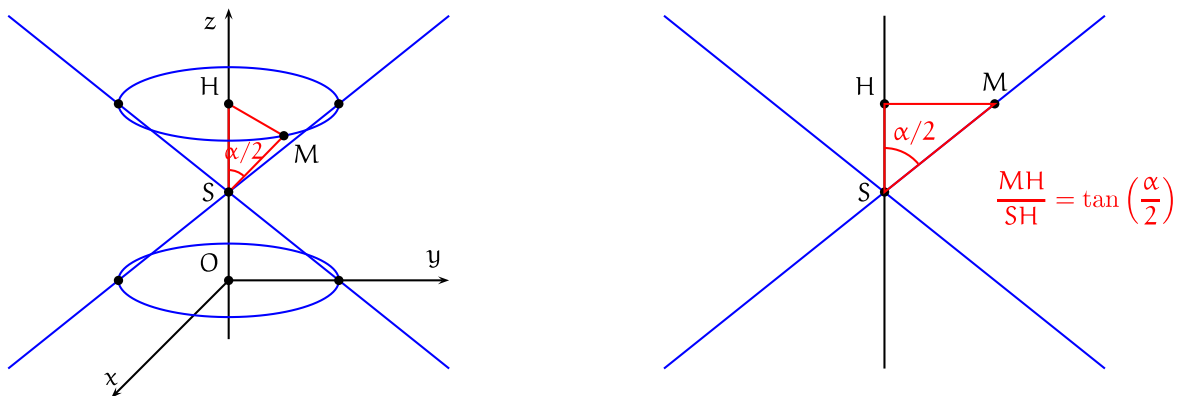
• Equation cartésienne d'un cône de révolution d'axe (Oz)

Soient  $S(0, 0, h)$  un point de l'axe (Oz) et  $\alpha$  un réel appartenant à  $]0, \pi[$ .

Une équation cartésienne du cône de révolution d'axe (Oz), de sommet  $S$  et d'angle au sommet  $\alpha$  est

$$x^2 + y^2 = (z - h)^2 \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right).$$

(Equation obtenue en passant aux coordonnées dans l'égalité  $HM^2 = SH^2 \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur (Oz)).



• Intersection d'un cône de révolution d'axe  $(Oz)$  et d'un plan parallèle au plan  $(xOy)$  ou à l'axe  $(Oz)$

Soient  $S$  un point de l'axe  $(Oz)$  et  $\alpha$  un réel appartenant à  $]0, \pi[$ .

Soient  $\mathcal{C}$  le cône de révolution d'axe  $(Oz)$ , de sommet  $S$  et d'angle au sommet  $\alpha$  et  $\mathcal{P}$  un plan.

- Si  $\mathcal{P} \parallel (xOy)$ , l'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{P}$  est un cercle.
- Si  $\mathcal{P} \parallel (Oz)$ , l'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{P}$  est soit une paire de droites sécantes en  $S$ , soit une hyperbole.

