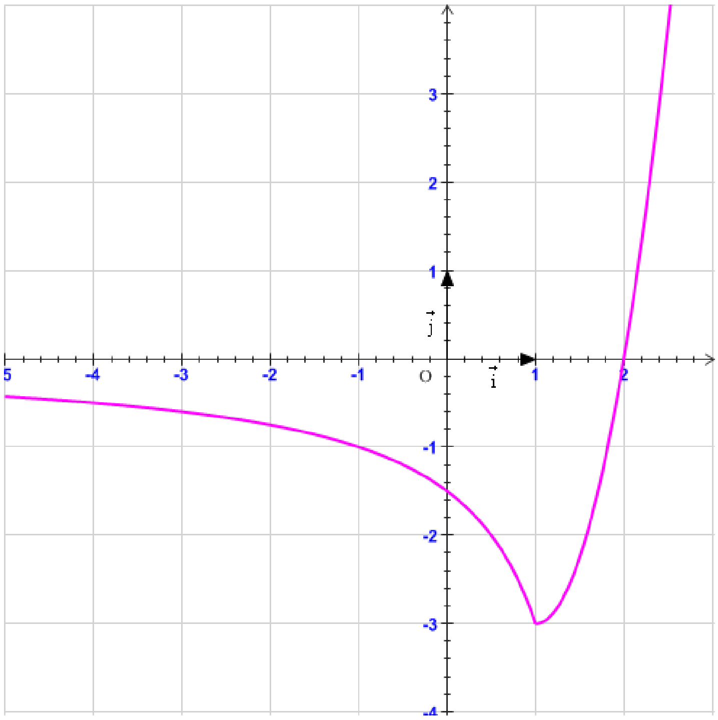
Exercice n°1 : ©

La figure ci – contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR.



On note que (ζ_f) admet au voisinage de - ∞ une asymptote horizontale d'équation y = 0, et au voisinage de + ∞ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

Pour chaque question indiquer la ou les reponses exactes :

1. Soit h une fonction définie sur IR, de même signe que f et telle que pour tout réel x, on a : $f(x) \leq h(x)$. On a alors :

   a) $\lim\limits_{-\infty} h = -\infty$

   b) $\lim\limits_{-\infty} h = 0$

   c) $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$

2. Soit g = $\frac{1}{f}$. On a alors :

   a) g est définie sur IR* ; b) g est définie sur IR\{2} ; c) $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$; d) $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$

   e) (ζ_g) admet une asymptote verticale.

3. Soit k la fonction définie sur IR* par : k(x) = $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. On a alors :

   a) $\lim\limits_{+\infty} f \circ k = -3$; b) $\lim\limits_{+\infty} k \circ f = 1$; c) $\lim\limits_{-\infty} f \circ k = -3$; d) $\lim\limits_{0^+} f \circ k = +\infty$; e) $\lim\limits_{0^-} f \circ k = -\infty$

Exercice n°2 :

1. Soit $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1$, $\forall\, x \in$ IR*.

a) Montrer que : $\forall x \in IR^*$, $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$.

b) Chercher $\lim\limits_{0} f$.

c) Chercher $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{x+\sin x}{2-\sin x}$, $\forall\, x \in$ IR.

a) Montrer que : $\begin{cases} \forall x > 1,\ \dfrac{x-1}{3} \le g(x) \le x+1 \\ \forall x < -1,\ x-1 \le g(x) \le \dfrac{x+1}{3} \end{cases}$

b) Chercher $\lim\limits_{+\infty} g$ et $\lim\limits_{-\infty} g$

Exercice n°3 :

A. Montrer que pour tout réel $a \in [0, 1]$, on a $\sqrt{a} \ge a$.

B. On s'intéresse aux fonctions f vérifiant les quatre conditions suivantes :

1. La fonction f est continue sur [0, 1] ;
2. f(0) = 0 et f(1) = 1 ;
3. la fonction f est strictement croissante sur [0, 1] ;
4. pour tout réel x de [0, 1], f(x) $\le x$.

a) Montrer que la fonction g définie par g(x) = $1-\sqrt{1-x}$ satisfait aux conditions précédentes.

b) En déduire que pour tout k $\in$ [0, 1], l'équation g(x) = k a une unique solution dans [0, 1].

c) Résoudre cette équation lorsque k = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Cette fonction g est elle dérivable en 1 ?

e) Trouver un polynôme du second degré P vérifiant les quatre conditions précédentes.

Question subsidiaire : La fonction j définie par j(x) = $1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ vérifie – t – elle les quatre conditions ?

Exercice n°4 : ©

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f_n(x) = \tan x - x - n$.

1. Soit n un entier naturel fixé.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f_n(x)$.

b) Etudier le sens de variations de la fonction f_n.

c) Démontrer que l'équation d'inconnue x, $f_n(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. On note α_n cette solution.

d) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f_n(x)$.

2. La question 1. (c) permet de définir la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Justifier que cette suite est bornée.

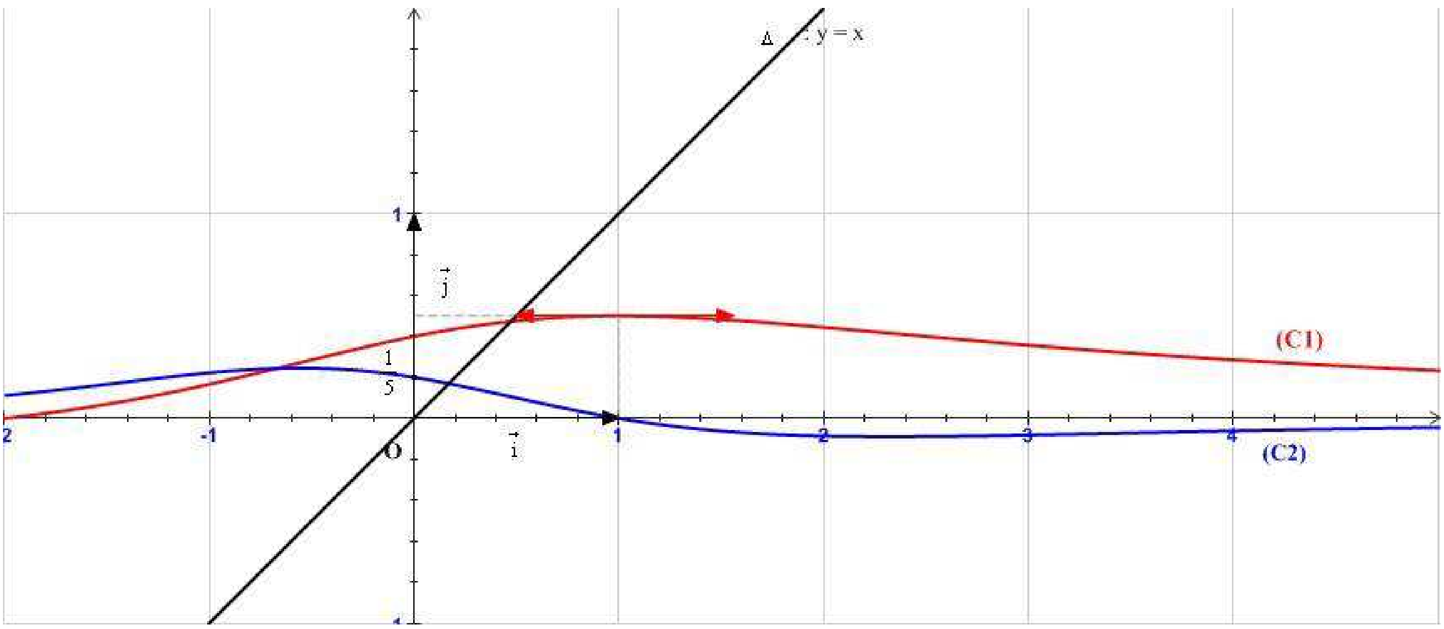
b) Calculer $f_n(\alpha_{n+1})$ pour $n\in\mathbb{N}$.

c) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

d) Déterminer la limite de $\tan(\alpha_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

e) Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice n°5 :



Dans la figure ci-dessus, on a représenté deux courbes (C_1) et (C_2) définies et continues sur $[-2,+\infty[$ ayant toutes les deux la droite d'équation y = 0 comme asymptote au voisinage de + ∞.

Les deux courbes sont celles d'une fonction f et sa dérivée $f\,'$.

I. Lecture graphique :

En utilisant le graphique, répondre à chacune des questions suivantes :

1) Justifier que (C_1) est la courbe représentative de f.

2) a) Déterminer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{+\infty} f$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2f(x)-1}{2x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2-5f(x)}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Prouver que l'équation $f(x)=x$ admet sur [0, 1] une solution unique α.

b) Montrer que pour tous réels a et b appartenant à [0, 1], on a : $|f(b)-f(a)| \leq \frac{1}{5}|b-a|$.

II. Etude d'une suite :

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout n de IN, $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Prouver que pour tout n de IN, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{5}|u_n-\alpha|$.
3. Démontrer alors par récurrence que $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$; puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$

a) Montrer que pour tout n de IN, $n\alpha - \frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] \leq S_n \leq n\alpha + \frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$

b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice n°6 : ©

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi^2]$ par : $f(x) = \cos\sqrt{x}$

1. a) Vérifier que pour tout réel $x \in [0, \pi^2]$, $f(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

b) Démontrer que f est dérivable en zéro et donner f ′ (0)

2. a) Justifier que f est dérivable sur $[0, \pi^2]$ et calculer f ′ (x).

b) Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3. a) Résoudre dans $[0, \pi^2]$ l'équation : $f(x) = 0$.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse $\frac{\pi^2}{4}$.

Exercice n°7 : ©

On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}^*_+$ telle que : $h(1)=0$ et $h'(x)=\dfrac{1}{x}$

On pose $F(x)=h\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

1- Montrer que F est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
2- Montrer que F est une fonction impaire.
3- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$; $F(x)\le x$.

Exercice n°1 :

<table>
<tr><th>Reponses</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr><td>4. Soit h une fonction définie sur IR, de même signe que f et telle que pour tout réel x, on a :
f(x) ≤ h(x). On a alors :
$\lim\limits_{-\infty} h = 0$
$\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$</td><td>∀ x ∈]- ∞, 2], on a : f(x) ≤ h(x) ≤ 0
$\lim\limits_{-\infty} \mathrm{f} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{-\infty} h = 0}$
∀ x ∈ [2, + ∞[, on a : 0 ≤ f(x) ≤ h(x)
$\lim\limits_{+\infty} \mathrm{f} = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{+\infty} h = +\infty}$</td></tr>
<tr><td>5. Soit g = $\frac{1}{\mathrm{f}}$. On a alors :
g est définie sur IR\{2}
$\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$
(ζ_g) admet une asymptote verticale</td><td>f(x) = 0 ⇔ x = 2 donc g = $\frac{1}{\mathrm{f}}$ est définie sur IR \{2}
$\lim\limits_{-\infty} \mathrm{f} = 0^- \Rightarrow \lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{-\infty} \frac{1}{\mathrm{f}} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{2^-} g = \lim\limits_{2^-} \frac{1}{\mathrm{f}} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{2^+} g = \lim\limits_{2^+} \frac{1}{\mathrm{f}} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ La droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale à (ζ_g)</td></tr>
<tr><td>6. Soit k la fonction définie sur IR* par : k(x) = $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. On a alors :
$\lim\limits_{+\infty} \mathrm{f} \circ k = -3$
$\lim\limits_{+\infty} k \circ \mathrm{f} = 1$
$\lim\limits_{0^+} \mathrm{f} \circ k = +\infty$</td><td>$\lim\limits_{+\infty} k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}{\cancel{x}} = 1$
$\lim\limits_{1} \mathrm{f} = \mathrm{f}(1) = -3 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{+\infty} \mathrm{f} \circ k = -3}$
$\lim\limits_{+\infty} \mathrm{f} = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} k = 1 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{+\infty} k \circ \mathrm{f} = 1}$
$\lim\limits_{0^+} k = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{f} = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{0^+} \mathrm{f} \circ k = +\infty}$</td></tr>
</table>

Exercice n°4 :

$f_n(x) = \tan x - x - n \,,\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1. a) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f_n(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \underbrace{\tan x}_{+\infty} \underbrace{-x}_{-\frac{\pi}{2}} - n = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \underbrace{\tan x}_{-\infty} \underbrace{-x}_{\frac{\pi}{2}} - n = -\infty$

b) f_n est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et on a : $f_n'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0,\ \forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

f_n est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

c) La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc f_n réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $f_n\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim\limits_{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f_n ; \lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f_n\right[= \left]-\infty;+\infty\right[= IR$

$\Rightarrow$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		α_n		$\frac{\pi}{2}$
d) $f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\frac{\pi}{2}$		α_n		$\frac{\pi}{2}$
$f_n(x)$		$-$	0	$+$	

2. a) $\alpha_n \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow (\alpha_n)$ est bornée.

b) $f_n(\alpha_{n+1}) = \tan(\alpha_{n+1}) - \alpha_{n+1} - n$

Or $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \tan(\alpha_{n+1}) - \alpha_{n+1} - n - 1 = 0 \Rightarrow f_n(\alpha_{n+1}) = \tan(\alpha_{n+1}) - \alpha_{n+1} - n = 1$

c) $f_n(\alpha_{n+1}) = 1 > 0 \Rightarrow f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n) \underset{f_n \text{ est strictement croissante}}{\Rightarrow} \alpha_{n+1} > \alpha_n$

$\Rightarrow (\alpha_n)$ est strictement croissante.

NB : (α_n) est strictement croissante et majorée par $\frac{\pi}{2}$ donc elle est convergente.

d) $f_n(\alpha_n) = \tan(\alpha_n) - \alpha_n - n = 0 \Rightarrow \tan(\alpha_n) = \alpha_n + n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \tan(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\alpha_n}_{\text{a une limite finie}} + \underbrace{n}_{+\infty} = +\infty$

e) $\alpha_n \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan(\alpha_n) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice n°6 :

f(x) = $\cos\sqrt{x}$, $\forall\, x \in [0, \pi^2]$.

1. a) Pour tout réel $x \in [0, \pi^2]$, f(x) = $\cos\sqrt{x} = \cos\left(2\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \Rightarrow$ f(x) – 1 = $2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$.

Cos2a = cos²a – sin²a = 2cos²a – 1 = 1 – 2sin²a

b) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} -\frac{1}{2} \times \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0 et on f ′ (0) = $-\frac{1}{2}$.

2. a) f est la composée des fonctions cosinus et racine carrée.

Soit U(x) = $\sqrt{x}$, $\forall\, x \in [0, \pi^2]$.

U est dérivable sur $]0, \pi^2]$

U($]0, \pi^2]$) = $]0, \pi]$

Cosinus est dérivable sur IR en particulier sur $]0, \pi]$

$\Rightarrow$ f = cos o U est dérivable sur $]0, \pi^2]$ et ona :

$f'(x) = U'(x) \times [-\sin(U(x))] = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\right) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in]0, \pi^2]$

Ainsi $\forall x \in [0, \pi^2],\ f'(x) = \begin{cases} -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & si\ x \in]0, \pi^2] \\ -\frac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$

b) Si $x \in]0, \pi^2]$ alors $0 < \sqrt{x} \leq \pi \Rightarrow \sin\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0\ \forall x \in]0, \pi^2]$.

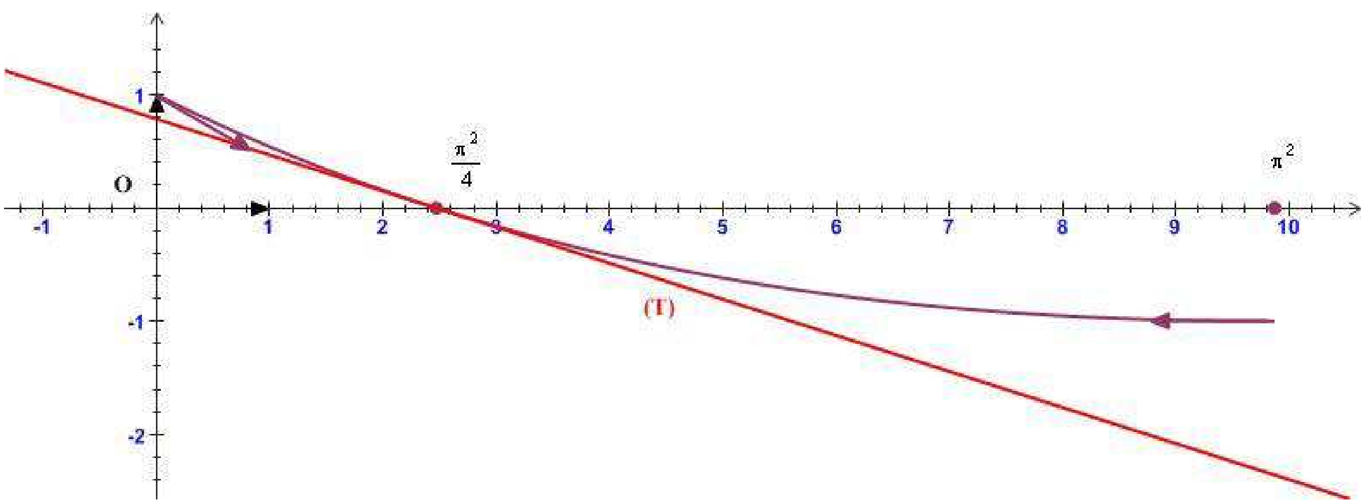
x	0		π^2
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

3. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\sqrt{x} = 0$ et $\sqrt{x} \in [0, \pi] \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi^2}{4}$

b) Soit (T) la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{\pi^2}{4}$

$(T) : y = f'(\frac{\pi^2}{4})(x - \frac{\pi^2}{4}) + f(\frac{\pi^2}{4}) = -\frac{1}{\pi}\left(x - \frac{\pi^2}{4}\right) = -\frac{1}{\pi}x + \frac{\pi}{4}$

Remarque : La courbe de f est donnée ci – dessous n'est pas demandée mais peut nous donner une idée sur le travail qu'on a fait.



Exercice n°7 :

h est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*_+$ telle que : $h(1)=0$ et $h'(x)=\frac{1}{x}$

(C'est une fonction qu'on va l'étudier plus tard appelée fonction logarithme népérien)

On pose $F(x)=h\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

1. Domaine de définition de F :

   $\forall\, x \in$ IR, $1 + x^2 > x^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x \Rightarrow x+\sqrt{1+x^2} > 0$

   Puisque h est définie sur $\mathbb{R}^*_+ \Rightarrow F(x)=h\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ est définie sur IR.

   Domaine de dérivabilité de F :

   $\left(x \overset{U}{\mapsto} 1+x^2\right)$ est dérivable et strictement positive sur IR $\Rightarrow \sqrt{U}$ est dérivable sur IR

   $\Rightarrow \left(x \mapsto x+\sqrt{1+x^2}\right)$ est dérivable sur IR

   $\left.\begin{array}{l} \left(x \overset{V}{\mapsto} x+\sqrt{1+x^2}\right) \text{ est dérivable sur IR} \\ \text{h est dérivable sur } IR^*_+ \\ V(IR) \subset IR^*_+ \end{array}\right\} \Rightarrow$ F = h o V est dérivable sur IR.

   Calcul de dérivée de F :

   F ′ (x) = V ′ $(x) \times$ h ′ (V(x)) = $\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\times\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall\, x \in$ IR.

2. Parité de F :

   Soit H(x) = F(x) + F(- x), $\forall\, x \in$ IR.

   H est dérivable sur IR (n'oublier pas de traiter F(- x) comme composée de deux fonctions dérivables sur IR)

   H ′ (x) = F'(x) – F ′ (- x) = 0 car F ′ est paire.

   $\Rightarrow$ H est une constante

   Or H(0) = 2F(0) = 2h(1) = 0 $\Rightarrow$ H(x) = F(x) + F(- x) = 0, $\forall\, x \in$ IR $\Rightarrow$ F(- x) = - F(x), $\forall\, x \in$ IR.

   $\Rightarrow$ F est une function impaire.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ est dérivable sur } [0,x] \\ \forall t \in [0,x],\ F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |F(x) - F(0)| \leq |x| \text{ (D'après le théorème des accroissements finis)}$$

$\Rightarrow |F(x)| \leq x,\ \forall x \in \mathbb{R}_+$.

$\Rightarrow -x \leq F(x) \leq x,\ \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Autrement :

On aurait pu démontrer l'inégalité précédente par une étude de fonction.

On pose $G(x) = F(x) - x,\ x \in \mathbb{R}_+$

G est dérivable sur IR et on a : $G'(x) = F'(x) - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 < 0$

$\Rightarrow$ G est strictement décroissante sur IR

$\Rightarrow$ Si $x \geq 0$ alors $G(x) \leq G(0) \Rightarrow G(x) \leq 0 \Rightarrow F(x) \leq x$.