Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des trois questions, trois affirmations sont proposées. Reconnaitre l'affirmation exacte.

1) Une transformation qui admet pour écriture complexe z' = a z + b. où a et b sont deux nombres complexes, dans le plan complexe :

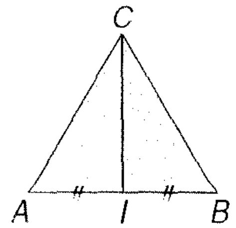
   $\boxed{a}$ est une similitude $\boxed{b}$ est une translation lorsque a = 1 $\boxed{c}$ admet un unique point fixe Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$

2) Dans le plan orienté, ABCD est un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ On considère la similitude directe S de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   L'image de B par S est :

   $\boxed{a}$ D $\boxed{b}$ C $\boxed{c}$ O

3) ABC est un triangle équilatéral direct, I est le milieu de [AB] , et f est la similitude directe qui transforme A en B et C en I . Le rapport k de f et l'angle α de f sont tels que :



   $\boxed{a}$ $k = 2 \text{ et } \alpha \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ $\boxed{b}$ $k = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ $\boxed{c}$ $k = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A. on note I = A * B, J = A * C et K = B * C et E le symétrique de C par rapport à A.

1) Soit S_1 la similitude directe de centre B qui transforme C en A et S_2 la similitude directe de centre C qui envoie A sur B.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S_1 et S_2.
   b) Déterminer S_1(K) et S_2(J).
2) Soit $h = S_2 \circ S_1^{-1}$ et $h' = S_1 \circ S_2^{-1}$.
   a) Déterminer h(A) puis caractériser h.
   b) Déterminer h' ○ h puis caractériser h'.
3) Soit M un point du plan distinct de B et C soit $S_1(M) = M'$ et $S_2(M) = M''$.
   Montrer que M'BM est un triangle rectangle isocèle en M. Donner alors une construction du point M' connaissant le point M.
4) Montre que MM''C est un triangle rectangle et isocèle en M et construire le point M'' connaissant le point M.
5) Soit D le point tel que: A = D * B.
   a) Montrer que $S_1(D) = S_2(D) = E$.
   b) Montrer que si M ≠ D la droite (M'M'') passe par un point fixe à préciser.

Exercice 4 :

Dans le plan orienté, on considère deux triangles équilatéraux ADB et ACE de sens direct. On suppose que AB=AC, faire une figure en prenant AB = 4cm et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. On note : O = B*C, J = A*E et I = A*D .Tracer le triangle OIJ.

1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S de centre C telle que S(J)=A.
2) Soit K = S(O).
   a) Montrer que le triangle COK est rectangle en O.
   b) Déduire la construction de K.
3) a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S' de centre B telle que S'(A) = I.
   b) Quelle est l'image de K par S' ?
4) Soit $\tau = S' \circ S$.
   a) Démontrer que τ est une rotation de centre O et préciser son ongle.
   b) En déduire que le triangle OIJ est équilatéral.
5) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   a) Montrer que $R \circ S$ est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.
   b) Déterminer : $R \circ S(C)$ et $R \circ S(J)$. Construire alors le centre W de $R \circ S$.

Exercice 5:

Soit ABCD un carré de centre O avec $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et I=A*B.

1) On désigne par f la similitude directe qui envoie A en B et D en I.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de f. Déterminer son centre Ω.
   b) Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par f. En déduire que le triangle OΩC est rectangle.
2) Soit $g = f \circ S_{(\Omega C)}$ on note J = Ω*C.
   a) Montrer que g est une similitude indirecte. Préciser son centre et son rapport.
   b) Montrer que l'axe Δ de g est la médiatrice de [OJ].
3) Soit $h = f \circ g^{-1}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.

Exercice 5 :

Soit f définie sur I =]0, 2] par f (x) = $\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o, $\vec{i}, \vec{j}$).

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Soit h définie sur]0, 2] pour h (x) = f (x) – x.
   a) Etudier le sens de variation de h.
   b) En déduire que l'équation f (x) = x admet dans]0, 2] une solution unique α et que $1,2 < \alpha < 1,3$.
   c) Tracer (C) et D : y = x dans le repère (o, $\vec{i}, \vec{j}$).
4) a) Montrer que f réalise une bijection de]0, 2] sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.
   c) Tracer la courbe (C ') de f^{-1} dans le repère (o, $\vec{i}, \vec{j}$).
   d) Ecrire une équation cartésienne de la tangente Δ à (C ') au point d'abscisse $\sqrt{3}$.
5) Calculer f^{-1} (x) pour tout $x \in J$.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur [0, 2] par f (t) = $\sqrt{1+t}$

1) a) Calculer f ' (t), où f ' est la fonction dérivée de f.
   b) Montrer que pour tout t éléments de [0, 2], $1 \leq \sqrt{1+t} \leq 2$
   c) En déduire que pour tout t éléments de [0, 2], $\frac{1}{4} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2}$
2) Soit x un élément de [0, 2]. Montrer, à l'aide du théorème des inégalités des accroissements finis que $1+\frac{1}{4}x \leq \sqrt{x+1} \leq 1+\frac{1}{2}x$
3) En déduire un encadrement de $\sqrt{1{,}002}$
4) On appelle (ζ) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 5 cm)
   a) Tracer (ζ) ainsi que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : y = $\frac{1}{2}x+1$ et y = $\frac{1}{4}x+1$
   b) Placez les points A (0, 1), B (2, 2), C $\left(2,\frac{3}{2}\right)$ et D (2, 0).
   c) Calculez, en cm^2, l'aire de deux trapèzes OABD et OACD.
   d) On note A l'aire de la portion de plan limitée par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la courbe (ζ) et la droite d'équation
x = 2. Hachurez cette portion de plan. Montrer que 62,5 cm² ≤ A ≤ 75 cm².

Exercice 2 : Soit les fonctions numériques d'une variable réelle définies par : $x \mapsto f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)$ et $g \mapsto g(x)=2x^3+x^2-1$

1) Démontrer que pour tout $x \neq 0$, les nombres f '(x) et g(x) ont le même signe.
2) Etudier les variations de la fonction g sur IR. En déduire que l'équation g(x)=0 admet dans IR une solution unique α, avec $0 < \alpha < 1$. (on ne cherchera pas à calculer α.)
3) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

On désigne par ζ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (unité 3 cm), par I le point de ζ d'abscisse -1 et par J le point de ζ d'abscisse +1.

4) a- Vérifier que la droite (IJ) est la tangente en J à ζ.
   b- Déterminer une équation de la tangente $\Im$ en I à ζ.
5) Etudier la position de ζ par rapport à $\Im$.
6) Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe ζ. (On prendra $\frac{2}{3}$ comme valeur approchée de α.)

Exercice 3 :

1) soit les fonctions définies sur $\left[0;\frac{\Pi}{2}\right[$: $f : x \mapsto \sin x - x$ et $g : x \mapsto \tan x - x$.

Etudier les variations de f et de g. En déduire le signe de f et de g.

2) En déduire que pour tout x de $\left]0;\frac{\Pi}{2}\right[$: sin x < x < tan x

3) Soit la fonction h: $x \mapsto \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$ définie sur $\left[0;\frac{\Pi}{2}\right[$.

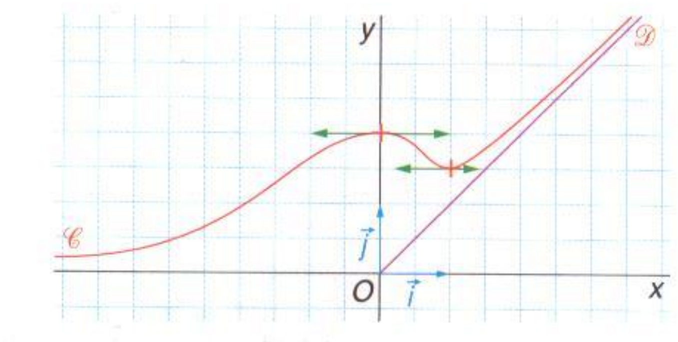
   a) Calculer h'(x) et h"(x).
   b) Etudier les variations de h' et de h.
   c) En déduire que pour tout x de $\left]0;\frac{\Pi}{2}\right[$: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$.

__Exercice 4 : (4points)__

Soit f une fonction dérivable sur IR.

Ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe (ζ) de la fonction f, ses tangentes « horizontales » et ses asymptotes d'équation

y = 0 en $-\infty$ et y = x en $+\infty$.



1) Par une lecture graphique :
   a) Déterminer f(0) et f'(0).
   b) Déterminer $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   c) Justifier que la restriction g de f à l'intervalle]-∞ ; 0 [admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser l'ensemble de définition de g^{-1}.

2) Soit (ζ') la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Tracer la courbe (ζ') et la demi-tangente à
(ζ') au point d'abscisse 2.

3) Soit la fonction h définie sur IR par $h(x) = \sqrt[3]{f(x)}$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x)$.
   b) Montrer que h est dérivable sur IR et dresser le tableau de variation de la fonction h.