

Exercice 1 : Q-CM

Donner les bonnes réponses.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 2$.

1) La primitive G de la fonction $x \mapsto f(2x)$ qui vérifie $G(0) = 2$ est telle que $G(x)$ est égal à :

- a) $F(2x) + 1$ b) $\frac{1}{2}F(2x) + 1$ c) $\frac{1}{2}F(2x)$

2) La primitive H de la fonction $x \mapsto f(x+2)$ qui vérifie $H(0) = 2$ est la fonction :

- a) $x \mapsto F(x+2) - F(2)$ b) $x \mapsto F\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$ c) $x \mapsto F(x+2) + 2 - F(2)$

3) La primitive J de la fonction $x \mapsto f(x) + 2$ qui vérifie $J(0) = 2$ est la fonction :

- a) $x \mapsto F(x) + 2$ b) $x \mapsto F(x) + 2x$ c) $x \mapsto F(x)$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et F l'unique primitive de f sur \mathbb{R} qui vérifie la condition $F(0) = 0$.

1) Démontrer que la fonction $x \mapsto -F(-x)$ est une primitive de f sur \mathbb{R} . En déduire que F est impaire.

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = F\left(-\frac{1}{x}\right)$

a) Démontrer que g est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) En déduire que, pour tout réel $x > 0$: $F(x) = 2F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)$ et que F admet une limite finie L en $+\infty$.

3) On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = F(\tan x)$.

a) Déterminer la fonction dérivée de h .

b) En déduire que, pour tout réel x , $h(x) = x$. Calculer $F(1)$ et en déduire la valeur de L .

Exercice 3 :

Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée.

1) $f : x \mapsto 4x^2 - 3x + 2$, $I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$; 2) $f : x \mapsto \cos 3x$, $I = \mathbb{R}$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

3) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x}}$, $I =]-\infty; 4[$ et $F(0) = 0$; 4) $f : x \mapsto \cos x \sin 2x$, $I = \mathbb{R}$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 4 :

Dans le plan orienté, on considère deux triangles équilatéraux ADB et ACE de sens direct. On suppose que $AB=AC$, faire une figure en prenant $AB = 4\text{cm}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. On note : $O = B^*C$, $J = A^*E$ et $I = A^*D$. Tracer le triangle OIJ .

1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S de centre C telle que $S(J)=A$.

2) Soit $K = S(O)$.

a) Montrer que le triangle COK est rectangle en O .

b) Déduire la construction de K .

3) a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S' de centre B telle que $S'(A) = I$.

b) Quelle est l'image de K par S' ?

4) Soit $\tau = S' \circ S$.

a) Démontrer que τ est une rotation de centre O et préciser son angle.

b) En déduire que le triangle OIJ est équilatéral.

5) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que $R \circ S$ est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.

b) Déterminer : $R \circ S(C)$ et $R \circ S(J)$. Construire alors le centre W de $R \circ S$.