Exercice N°1 :

Soit (I_n) la suite définie, pour tout entier n, par : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ si $n \geq 1$ et $I_0 = \int_1^e x\,dx$

1) Calculer I_0, puis I_1.
2) Au moyen d'une intégration par parties, établir la relation pour tout entier $n \geq 1$;
   $2I_n + n\, I_{n-1} = e^2$. En déduire I_2.
3) a) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
   a) En déduire l'encadrement pour tout entier $n \geq 1$: $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$
   b) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$

Exercice N°2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I) Soit g la fonction définie sur] 0; + ∞[par: $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$.

1) Montrer que g est dérivable sur]0 ; + ∞[et calculer g'(x).
2) Dresser le tableau des variations de g.
3) Préciser le signe de g(x) sur l'intervalle] 0 ; + ∞[.

II) Soit f la fonction définie sur]0 ; + ∞[par : $f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x}$. On note (ζ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, interpréter graphiquement ce résultat.
2) a) Vérifier que pour tout, x > 0, $f'(x) = \frac{1}{x^2}\, g(x)$ òu g est la fonction définie dans I).
   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
3) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α sur]0, + ∞[et que $0,4 < \alpha < 0,5$
4) a) Montrer que la droite D : y = 2x + 1 est une asymptote à (ζ) au voisinage de +∞.
   b) Etudier la position relative de la courbe (ζ) et la droite D.
5) Déterminer une équation de la droite T qui est tangente à la courbe (ζ) en son point I d'abscisse 1.
6) Sur un même graphique, placer le point I puis tracer T, D et (ζ).

III) Soit F la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

1) Montrer que la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle] 0, + ∞[.
2) On note A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ζ), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e. Calculer la valeur de A

<u>Exercice N°3 :</u>

Soit f la fonction $[0,+\infty[$ définie sur par : $f(x)=\left(e^{-x}-1\right)^2$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan(unité : 2cm).

1.a) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $f'(x)=2e^{-x}\left(1-e^{-2x}\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2.a) Tracer (ζ).

b) Calculer en cm^2 , l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (ζ) et les droites d'équations y = 0, x = 0 et x = 1.

3.a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer dans le même repère la courbe (ζ') de la fonction réciproque f^{-1} de f.

c) Calculer en cm^2 l, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (ζ), (ζ') et les droites d'équations : x = 1 et y = 1.

4.a) Montrer que : $\forall x\in[0;1[: f^{-1}(x)=-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$.

b) Montrer que : f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

5.On pose : $I_\alpha=\int_\alpha^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{x}-x}dx$ où α est un réel de]0 ;1[.

a) Montrer que $I_\alpha=2\ln 2-2f^{-1}(\alpha)$.

b) Calculer : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha$