série n°4

4ème.math

EXERCICE N°1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombre complexes on considère l'équation

$E_d : z^3 + (3-d^2)z + 2i(1+d^2) = 0$ où d est un nombre complexe donné de module 2

1/a) Vérifier que 2i est une solution de E_d

b) Résoudre alors l'équation E_d

2/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B, M , N d'affixe respectives $2i$; $-i$; $-i+d$; $-i-d$

a) Calculer MN et déterminer le milieu de [MN]

b) En déduire que lorsque d varie, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera

c) Dans le cas où AMN est un triangle , montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.

d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A

EXERCICE N°2

1) Soit f une fonction définie sur]1 ; + ∞ [et telle que $1 \le f(x) \le \sqrt{x}$ sur]1 ; + ∞ [. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

2) Si, pour tout réel x, $|f(x) - 2| \le \frac{1}{x}$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

3) L'image de l'intervalle [-1 ; 2] par la fonction carré est l'intervalle [1 ; 4].

4) La fonction f : $x \mapsto 2(x-2)\sqrt{x}+1$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle [0 ; 1].

5) L'image de l'intervalle [1 ; 2[par la fonction g : $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est un intervalle de la forme [a ; b [, où a et b sont deux réels.

EXERCICE N°3

Calculer :

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+x} - 2x$; 2/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-2} - 2x$; 3/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+3} + x + 2$

4/ $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$; 5/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(\frac{1}{x})$; 6/ $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 \pi x}$

a) $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$ e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ f) $\lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ h) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3+8}{x^2-x-6}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+8}{x^2-x-6}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-6}{|x+3|}$ k) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2+x-6}{|x+3|}$

EXERCICE N°4

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}-1}{(x-2)(x^2-3x+2)}$

1) Déterminer Df
2) Démontrer que f est prolongeable par continuité en 1 et déterminer sa prolongement.
3) f est –elle prolongeable par continuité en 2 ?
4) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$

EXERCICE N°5

On considère la fonction f définie sur [0 ; + ∞ [par : f(x) = $\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}$

1) Etablir que, pour tout x de [0 ; + ∞ [, on a : f(x) = $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}$
2) Démontrer que, pour x ≥ 4 ;
   a) $x-2 \geq \dfrac{1}{2}x$; b) $\sqrt{2x}+\sqrt{x+2} \leq 2\sqrt{2x}$
3) En déduire que, pour tout x ≥ 4, f(x) ≥ $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{x}$. Que peut-on en conclure pour $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

EXERCICE N°6

On considère la fonction polynôme P définie sur IR par $P(x) = 4x^3 - 3x - \dfrac{1}{2}$.

1) Calculer P(-1), $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, P(0) et P(1).
2) a) Montrer que l'équation P(x) = 0 admet dans IR trois racines distinctes qu'on les notera x_1, x_2 et x_3 avec $x_1 < x_2 < x_3$.
   b) Vérifier que $-1 < x_1 < -\dfrac{1}{2} < x_2 < 0 < x_3 < 1$.
3) a) Montrer que pour tout réel α on a : $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$.
   b) Montrer alors, que $x_1 = \cos\left(\dfrac{11\pi}{9}\right)$, $x_2 = \cos\left(\dfrac{7\pi}{9}\right)$ et $x_3 = \cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$

EXERCICE N°7

Soit la courbe (C) représentative d'une fonction f.

1) conjecturer :
   a) l'ensemble E de définition de f ;
   b) l'image par f des intervalles [0, +∞[et]– ∞, 0]
   c) les limites de f en + ∞ et en – ∞
2) a) déterminer le signe de f(x)
   b) conjecturer le signe de la dérivée de f.
   c)donner le tableau de variation de f.