série n°5

4ème.math

EXERCICE N°1

Soit la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{2}{U_n} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

1/Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 2$

2/a) Montrer que la suite U est strictement décroissante

b) En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite

3/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 2 < \frac{1}{2}(U_n - 2)$

b) En déduire que $U_n - 2 \leq \dfrac{1}{2^n}$, retrouver le résultat du 2°)b/

4/ Soit V la suite définie par $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$, $n \in \mathbb{N}$

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n

b) Calculer V_1 , V_2 et V_3 en fonction de V_0 ; En déduire V_n en fonction de n

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ et retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE N°2

Soit la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = U_{n-1} + \dfrac{1}{U_{n-1}} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1/ Montrer que la suite U n'est pas convergente.

2/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$

3/ Montrer que U est strictement croissante

4/ En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

5/ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

a) $2 \leq U_n^2 - U_{n-1}^2 \leq 2 + U_n - U_{n-1}$

b) $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n + U_n - 1$

c) $1 - \dfrac{1}{U_n} \leq \dfrac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \dfrac{1}{U_n^2}$

6/ Montrer que la suite V définie par $V_n = \dfrac{\sqrt{2n}}{U_n}$ est convergente et déterminer sa limite

EXERCICE N°3

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = 0$ où $\theta \in [0, \pi[$

1/a) Déterminer le réel θ pour que l'équation (E) admette une solution nulle

b) On désigne par z' et z'' les racines de (E) ; sans calculer z' et z'' , montrer que : $\arg(z'+z'') \equiv 0[2\pi]$

c) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles les coefficients de l'équation (E) sont réels..

2/a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). En désignera par z' la solution dont la partie imaginaire est négative

b) Ecrire z' et z" sous forme exponentielle.

3/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixe respectives z' et z".

a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z'}{z''}$

b) Déterminer alors θ pour que OAB soit un triangle rectangle et isocèle

c) Déterminer et construire l'ensemble des points A lorsque θ varie

EXERCICE N°4

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos(\pi x)}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 2} - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2/ Montrer que, pour tout $x \in]-\infty, 1[$, on a : $\dfrac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

3/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

4/a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution $\alpha \in \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$

b) En déduire que : $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1 - \alpha^2}$

5/ Soit g la onction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$