L. B. Monastir *P.P. : Ali Zouhaïer*	***Série n :3***	***Aout 2013***
Chapitre :	Nombres complexes	

Rappel 1

1/ $\mathbb{C}=\left\{a+ib \text{ avec } (a,b) \in IR^2 \text{ et } i \text{ un nombre non réel tel que } i^2=-1\right\}$

2/ Toutes les règles de calcul vues dans IR restent valables dans $\mathbb{C}$.

Rappel 2

1/ Soit $z = a + ib$ où a et b sont deux réels. Le conjugué de z est $\overline{z} = a - ib$.

2/ $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$; • $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ • $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ • $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ avec $n \in IN$

• $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ avec $z \neq 0$ • $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ avec $z' \neq 0$

3/ Soit z un nombre complexe.

• $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ • $z - \overline{z} = 2i\ \mathrm{Im}(z)$ • $z\,\overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

• $z = \overline{z} \iff z$ est réel • $z = -\overline{z} \iff z$ est imaginaire.

Rappel 3

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1/ L'affixe d'un point $M(a,b)$ du plan est le nombre complexe $z=a+ib$ noté $aff(M)$ ou z_M. On dit que le point $M(a,b)$ est l'image de z.

2/ A, B et I sont trois points. $I = A * B \iff z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

3/ Soient M et M' deux points. On a: $M' = S_{(O;\vec{u})}(M) \iff z_{M'} = \overline{z_M}$

4/ Soit $(a,b) \in IR^2$. $\vec{w}$ est un vecteur de coordonnées (a,b) dans la base $(\vec{u};\vec{v})$

$\Updownarrow$

$\vec{w}$ a pour affixe $a + ib$ (noté $\mathrm{aff}(\vec{w})$ ou $z_{\vec{w}}$)

5/ A et B sont deux points. $aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$.

6/ $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont deux vecteurs et α et β sont deux réels. On a

$$aff(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) = \alpha\ aff(\vec{w}_1) + \beta\ aff(\vec{w}_2)$$

Théorème

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct.

Soient $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ deux vecteurs avec $\vec{w}_2 \neq \vec{O}$. On a :

1/ $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont colinéaires $\iff \frac{aff(\vec{w}_1)}{aff(\vec{w}_2)}$ est réel

2/ $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont orthogonaux $\iff \frac{aff(\vec{w}_1)}{aff(\vec{w}_2)}$ est imaginaire

Rappel 4

1/ Soit $z = a + ib$ où a et b sont deux réels. Le module de z est le réel $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

2/ $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$; • $|z|^2 = z\,\overline{z}$ • $|z| = \left|\overline{z}\right| = |-z|$ • $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

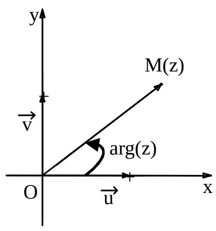
• $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ pour $z \neq 0$ • $|z^n| = |z|^n; \forall n \in \mathbb{Z}$ et pour $z \neq 0$.

3/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

- $\forall z \in \mathbb{C};\ |z| = OM$ avec M le point d'affixe z.
- $\forall(z,z') \in \mathbb{C}^2;\ |z'-z| = MM'$ avec M et M' les points d'affixes respectives z et z'.

Rappel 5

1/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan. On appelle argument de z, en radians, et on note $\arg(z)$ toute mesure, en radians, de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$.



On a donc : $\arg(z) \equiv \widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)}\quad[2\pi]$.

3/ Soit $z \in \mathbb{C}^*$; posons: $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)\quad[2\pi]$. On a

✠ $\arg\left(\overline{z}\right) \equiv -\arg(z)\quad[2\pi]$ ✠ $\arg(-z) \equiv \arg(z)+\pi\quad[2\pi]$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cette dernière écriture s'appelle écriture trigonométrique de z.

4/ $\forall(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2;\ \forall n \in \mathbb{Z}$

- $\arg(z.z') \equiv \arg(z)+\arg(z')\quad[2\pi]$ • $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\quad[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z)-\arg(z')\quad[2\pi]$ • $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\quad[2\pi]$;

5/ Soient z un nombre complexe de module r et d'argument θ et $n \in \mathbb{Z}$.

On a : $z^n = \left[\ r(\cos\theta + i\sin\theta)\ \right]^n = r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$ (formule de Moivre.)

Théorème

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D et tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. On a:

- $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)} \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$ • $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)} \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$

⊡ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{CD}{AB}(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)}\ [2\pi]$.

EXERCICE 1

1- Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1.

Montrer que $Z = \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel.

2- Posons $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$ et $z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$ avec $(\alpha,\beta) \in IR^2$.

i) Vérifier que $|z_1| = |z_2| = 1$

ii) Montrer que $Z = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2 = 2\cos(\alpha-\beta)+2$.

iii) Déduire que $Z \in IR^+$.

EXERCICE 2

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1et α un réel.
Soient les deux nombres complxes : $Z = z_1 + z_2 + \alpha z_1 z_2 + 1$ et
$Z' = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_1}\overline{z_2} + \alpha$.
Monrer que $Z' = \frac{Z}{z_1 z_2}$ en déduire que $|Z| = |Z'|$.

EXERCICE 3

1/a) Mettre $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous forme trigonométrique.

b) Montrer que $\forall n \in IN; a^n + \bar{a}^n = 2\cos\frac{n\pi}{3}$.

2/ Soit $z_0 = (1-i)a$

a) Mettre z_0 sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 4 (**bac**)

On considère le nombre complexe $u = -3+3i$

1/ Calculer le module et un argument de u

2/ Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe z tel que :

$uz = 6\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$.

3/ Déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 5

Le plan complexe P etant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u};\vec{v})$.

Soient les points $A(1)$ et $B(2-i)$. Soit f l'application qui a tout point $M(z)$ de P\\$\{A\}$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{z-2+i}{z-1}$.

1/ Soit l'ensemble $E = \{M(z) \in \mathrm{P}$ tel que $|z'| = 1\}$. Montrer que E est la médiatrice de

2/ Pour $M(z) \in \mathrm{P}\backslash\{A,B\}$ montrer que $\arg(z') \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)}\quad[2\pi]$

3/ Soit l'ensemble $F = \{M(z) \in \mathrm{P}$ tel que z' est un réel non nul$\}$.

Montrer que F est la droite (AB) privée des points A et B.

4/ Soit l'ensemble $G = \{M(z) \in \mathrm{P}$ tel que z' est un imaginaire pur$\}$.

Montrer que G est un cercle privée des points A et B.

EXERCICE 6 *bac Tn 2001controle - 4Sc&T*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

1/**a-** Ecrire sous forme trigonometrique chacun des nombres a et b.

b- Representer les points A et B dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

2/ On pose $z = a+b$ et on désigne par M le point d'affixe z.

a- Montrer que $ABMA$ est un carré.

b- Donner la forme trigonométrique de z.

c- Calculer alors $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

EXERCICE 7

I) On considère l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}; z \mapsto z' = \frac{i}{\bar{z}}$.

1/ Donner la forme algébrique et exponentielle de $f(-1+i)$.

2/ Calculer $(1+i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $f(z) = \frac{\bar{z}}{2}$.

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on désigne par A et B les poinrts d'affixes respoectives $(-i)$ et (-1). A tout point M d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe z'.

1/**a-** Montrer que $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right)} \equiv \widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)} + \frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

b- En déduire que $(OM) \perp (OM')$.

2/**a-** Montrer que $\overline{z'+i} = \frac{-i}{z}(z+1)$.

b- Déduire que si M appartient au cercle Γ de centre B et de rayon 1 privé de O, alors $|z'+i| = |z'|$.

c- Déduire que si M$\in \Gamma\backslash\{O\}$ alors M' appartient à une droite D à déterminer.

3/ Etant donné un point M$\in \Gamma\backslash\{O\}$, construire alors le point M'.