L. B. Monastir	**Série n :2**	*Aout 2013*
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre :	Suites réelles	

IV] Suites récurrentes

Théorème (admis)

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle.

- **Si** (u_n) est croissante et majorée **alors** (u_n) converge vers un réel a et que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant a$.
- **Si** (u_n) est décroissante et minorée **alors** (u_n) converge vers un réel a et que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \geqslant a$.

Théorème

Soient f est une fonction et (u_n) est une suite qui vérifient toutes les conditions nécessaires. On a :

$$\left.\begin{array}{r} u_{n+1} = f(u_n); \forall n \in I \\ (u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \\ \mathbf{f} \text{ est continue en } \ell \end{array}\right\} \Rightarrow f(\ell) = \ell.$$

Remarque :

$f(\ell) = \ell$ signifie que ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Exercice 7

On considère la suite (a_n) définie sur IN par : $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour tout n de IN.

a- Montrer que (a_n) est décroissante sur IN*

b- Montrer alors que (a_n) converge vers un réel L.

c- Vérifier que $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}; \forall n \in IN^*;$ trouver alors L.

Exercice 8 *D'après un devoir*

On cnsidère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2\sqrt{u_n}$; $\forall$n $\geqslant 0$

1/ Montrer que $\forall n \in IN;\ 0 \prec u_n \prec 1$.

2/ Montrer que (u_n) est décroissante.

3/ En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

4/a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b- Retrouver la limite de (u_n).

Exercice 9 *D'après un devoir*

1/ Soit f la fonction définie sur]0;+∞[par f$(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$.

a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[;$ f$(x) \geqslant \sqrt{2}$.

c- Montrer que $\forall x \geqslant \sqrt{2};$ f$(x) \leqslant x$.

2/ Soit la suite (u_n) défini sr IN* par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n);\ \forall n \in IN$

a- Montrer que $\forall n \in IN;$ u$_n \succ \sqrt{2}$.

b- Montrer que (u_n) est décroissante.

c- Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3/a- Montrer que $\forall n \in IN^*;\ 0 \prec u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.

b- En déduire que $\forall n \in IN^*;\ 0 \prec u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c- Retrouver la limite de (u_n).

Exercice 10 *D'après un devoir*

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par : $u_0 = 1$ et

$u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$; $\forall n \in IN$

1/ Montrer que pour tout n de IN on a : $u_n \geqslant 1$.

2/ Montrer que (u_n) est croissante.

3/**a**- Montrer que si on suppose que (u_n) est majorée alors (u_n) est converge vers -1.

b- Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Suites adjacentes:

Définition + Théorème

■ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0 \\ \bullet\, u_n \leqslant v_n;\ \forall n \in IN \\ \bullet\, (u_n) \text{ est croissante} \\ \bullet\, (v_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

▸ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite.

Exercice 10 Vrai - faux

1/ Les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN* par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes

2/ Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n+2}$; $\forall n \in IN$. (u_n) et (v_n) sont adjacentes .

Exercice 11 *D'après un devoir*

Soient les suites u et v définies sur IN* par : $\forall n \in IN^*$

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n(n!)}$

1/ Montrer que u est croissante et v est décroissante.

2/**a**- Montrer que ; $n! \geqslant n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (n!)$.

b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n)$.

c- Déduire alors que les suites u et v sont adjacentes.

3/**a**- Montrer que les suites u et v sont convergentes vers une même $\forall n \in IN^*$ limite L et que $\forall n \in IN^*;\ u_n \leqslant L \leqslant v_n$.

b- Calculer u_3 et v_3. En déduire que $1{,}66 \prec L \prec 1{,}73$.

Exercice 12

Soit les suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par :

$u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$

On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1/ Montrer que la suite (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.

2/ Comparer v_n et w_n.

3/**a**) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

b) Déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel α.