L. B. Monastir *P.P. : Ali Zouhaïer*	***Série n :4***	*Aout 2013*
Chapitre :	Nombres complexes	

2.Écriture exponentielle

Notation : $\forall\theta \in IR$; on pose par définition $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

1/ $\bullet\ e^{i0} = 1$ $\bullet\ e^{i\pi} = -1$ $\bullet\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\bullet\ e^{i\frac{-\pi}{2}} = -i$

2/ $\forall\theta \in IR;\ \forall k \in \mathbb{Z}$; $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.

3/ $\forall\theta \in IR;$ $\bullet\ |e^{i\theta}| = 1$ $\bullet\ \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\bullet\ -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

4/ Si z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ alors $z = re^{i\theta}$.
Cette dernière écriture s'appelle écriture exponentielle de z.

Théorème

$\forall(\theta,\theta') \in IR^2$;

$\bullet\ e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\bullet\ \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\bullet\ \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ $\bullet\ (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$.

Théorème ***(Formules d'Euler)***

$\forall\theta \in IR$ on a : $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$

$\forall\theta \in IR$; $\forall n \in \mathbb{Z}$. On a :

☒ $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$	☒ $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$
☒ $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$	☒ $e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i\sin(n\theta)$

EXERCICE 1

$(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormé direct de P. Soient M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 et M_6 sept points de P d'affixe respectifs :1; $z_1=e^{i\left(\frac{2\pi}{7}\right)}$, $z_2=e^{i\left(\frac{4\pi}{7}\right)}$, $z_3 = e^{i\left(\frac{6\pi}{7}\right)}$, $z_4 = e^{i\left(\frac{8\pi}{7}\right)}$, $z_5 = e^{i\left(\frac{10\pi}{7}\right)}$ et $z_6 = e^{i\left(\frac{12\pi}{7}\right)}$. Posons $a = z_1$.

1/ Prouver que tous les points M_k appartiennent au cercle trigonométrique.

2/a- Calculer a^7.

b- Exprimer z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 en fonction de a.

c- Montrer alors que $\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}+\overrightarrow{OM_4}+\overrightarrow{OM_5}+\overrightarrow{OM_6}=\vec{O}$

3/ Soit $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

a- Prouver que $a - 1 = 2i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)}$.

b- Montrer que $M_kM_{k+1} = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

c- Prouver que $\widehat{\left(\overrightarrow{OM_k};\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)} \equiv \frac{2\pi}{7}\ [2\pi]$.

4/ Soit $E = \{M(z) \in P \text{ tel que } |\frac{z-1}{z-a}| = 1\}$
Caracteriser géométriquement l'ensemble E.

3.Equations dans C

Théorème et

• Pour tout entier naturel non nul n, l'équation $z^n = 1$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, l'entier k appartient à $\{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}$.
▸ Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont appelées racines nièmes de l'unité.
☒ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Lorsque $n \geqslant 3$, les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Théorème et

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et n un entier naturel non nul. L'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par $z_k = re^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, (n\text{-}1)\}$, où r est le réel strictement positif tel que $r^n = |a|$.
▸ Ces solutions sont appelées racines nièmes du nombre complexe a.
☒ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Lorsque $n \geqslant 3$, les points images des racines nièmes de a sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $|a|$.

Théorème

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et$(b; c) \in \mathbb{C}^2$. On a
- $az^2 + bz + c = 0 \iff z = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ avec δ une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ alors
  ▸ $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ ▸ $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ ▸ $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Théorème

Soit P un polynôme de degré n (n$\in IN^*$) à variable complexe.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On a :
si $P(z_0) = 0$ **alors** il existe un polynôme Q de degré (n-1) tel que $\forall z \in \mathbb{C}$ on a : $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.

EXERCICE 2

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)z + 2i = 0$
2/ Soit θ un parametre réel au quel on associe l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2e^{i\theta}z + 2e^{2i\theta} = 0$.
a- Chercher les solution z_1 et z_2 de (E_θ).
b- Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
c- Calculer une mesure de $\left(\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_2}\right)$ avec M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 (le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$).
d- Déterminer la nature éxacte du triangle OM_1M_2.

EXERCICE 3

Soit $\theta \in]0,\pi[$. Soit l'équation E_θ : $z^2 - (e^{i\theta} - 1)z - 6 + 7e^{i\theta} - 2e^{2i\theta} = 0$.

1/ **a**- Vérifier que $z' = (2 - e^{i\theta})$ est l'une des deux solutions de E_θ.

b- Trouver l'autre solution z'' de E_θ.

2/ On muni le plan complexe P à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Désignons par I le point d'affixe 2 et par $F = \{M(2 - e^{i\theta}) avec \theta \in]0,\pi[\}$

a- Montrer que F est inclu dans un cercle de centre I.

b- caractériser F.

EXERCICE 4 *bac 2005 session principale*

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$

1)**a**- Vérifier que $(e^{i\theta} - i)^2 = -1 + e^{2i\theta} - 2ie^{i\theta}$

b- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$Z^2 - 2iZ + 2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$$

2) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i - e^{i\theta}$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a- Déterminer et construire l'ensemble C_1 décrit par M_1 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$.

b- Calculer l'affixe du milieu I du segment $[M_1M_2]$.

c- Déduire l'ensemble C_2 décrit par M_2 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$. Construire C_2.

3)**a**- Montrer que $(M_1M_2)^2 = 8(1 - \sin\theta)$.

b- Déduire la valeur de θ pour laquelle M_1M_2 est minimale.

EXERCICE 5 *bac 1998 session principale*

1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation:

$$(1 + i)z^2 - 2z + 1 - i = 0$$

2/ Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $mz^2 - 2z + \overline{m} = 0 \quad (E)$

où $\overline{m}$ est le nombre complexe conjugué de m.

3/ Dans toute la suite on prend $m = \sqrt{2}\, e^{i\alpha}$ où α est un réel.

a- Montrer que les racines z' et z" de l'équation (E) s'écrivent sous la forme : z'$=e^{i(\frac{\pi}{4}-\alpha)}$ et z"$=e^{-i(\frac{\pi}{4}+\alpha)}$

b- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par M' et M" les points d'affixes respectives z' et z" et par M le point d'affixe z'+z". Montrer que $\frac{z'}{z''} = i$. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont orthogonaux.

c- Montrer que le quadrilatère OM'MM" est un carré.

EXERCICE 6

1/ Résoudre dans C l'equation $z^2 - (5 + 3i)z + 4 + 7i = 0$

2/ Soit $P(z) = iz^3 + (3 - 8i)z^2 - (16 - 19i)z + 21 - 12i$

a- Montrer que l'équation $P(z) = 0$ possède une solution réelle que l'on précisera.

b- Trouver les nombres complexes a, b et c tels que :$\forall z \in C$ on a $P(z) = (z - 3)(az^2 + bz + c)$.

c- Résoudre alors $P(z) = 0$.

3/ $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan.Soient $A(3); B(2 + i)$ et $C(3 + 2i)$

a) Dterminer la nature exacte du triangle ABC.

b) Trouver l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un carré.

EXERCICE 7

Soit $(E)\,:\,z^3+(2-3i)z^2-(3+5i)z+2i-6=0$

1/**a**) Prouver que (E) admet une solution réelle z_0 que l'on précisera.

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que

$z^3+(2-3i)z^2-(3+5i)z+2i-6=(z-z_0)(az^2+bz+c); \forall z\in\mathbb{C}$

c) Résoudre alors (E).

2/ Soit $(O;\vec{u}\,:\,\vec{v})$ un repère orthnormé direct de P. On concidère les points A, B,et C d'affixes respectives : $-2;-1+2i$ et $1+i$.

a- Calculer $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$ et le mettre sous forme trigonométrique.

b- Déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

c- Soit M un point du plan d'affixe re$^{i\theta}$ ou r>0 et $\theta\in[0;2\pi]$.

Déterminer r et θ pour que $ABCM$ soit un carré.

EXERCICE 8

1/ Montrer que $j^2=\bar{j}; j^3=1$ et $1+j+j^2=0$ avec $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2/ Soit l'équation $(E)\,:\,z^4-z^3+4z^2+3z+5=0$.

a- Montrer que si un complexe z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E).

b- Verifier que j est une solution de (E).

3/ Résoudre enfin (E).