L. B. Monastir	**Série n : 28**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :
Chapitres : Dérivabilité + Bijection + …		

EXERCICE 1 *D'après un devoir.*

Soit f : $[1;+\infty[\to IR;$ x $\mapsto -1+\sqrt{x^2-1}$ et désignons par C_f la courbe de de f dans un repère orthonormé R.

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

2/ Calculer $f'(x);\ \forall x \in]1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.

3/ Montrer que $D : y = x - 1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

4/**a**- Montrer que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b- Expliciter $f^{-}(x)$ pour tout x de J.

5/ Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$ et vérifier que $2 < \alpha < 3$.

6/ Soit g la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

a- Montrer que g est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

b- En déduire que $g(x) = -1+\tan(x);\ \forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$.

EXERCICE 2

Soit $f : x \mapsto -2\sin^2 x - 1$

1/ Mq f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{3};0\right]$ dans un intervalle J à préciser.

2/ Etudier la continuité de f^{-1} ainsi que son sens de variation.

3/ Calculer $f^{-1}(-2)$.

4/ Prouver que f^{-1} est <u>seulement</u> dérivable sur J\{-1}.

5/**a**- $\forall x \in J,$ exprimer, en fonction de x, $\sin[f^{-1}(x)]$ ainsi que $\cos[f^{-1}(x)]$.

b- Calculer donc $(f^{-1})'(x), \forall x \in$ J\{-1}.

EXERCICE 3 .

Pour tout réel x on pose $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

1/ Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$

2/**a**- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1;$ déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Tracer C_f (courbe de f) dans un même repère orthonormé R.

3/ Donner une équation cartésienne de T la tangente à C_f en son point d'abscisse 0.

4/**a**- Prouver que f réalise une bijection de IR sur $]-1;0[$.

b- Tracer $C_{f^{-1}}$ (courbe de f^{-1}) dans le même repère.

c- Donner une équation cartésienne de T' la tangente à $C_{f^{-1}}$ en son point d'abscisse - $\frac{1}{2} = f(0)$.

5/ Expliciter $f^{-1}(x);\ \forall x \in]-1;0[$.

EXERCICE 4 .

On considère a présent la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1/**a**- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2,$ interpréter le résultat graphiquement.

b- Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[;\ f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$

c- Déduire que $\forall x \in [1;+\infty[;\ 0 < f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

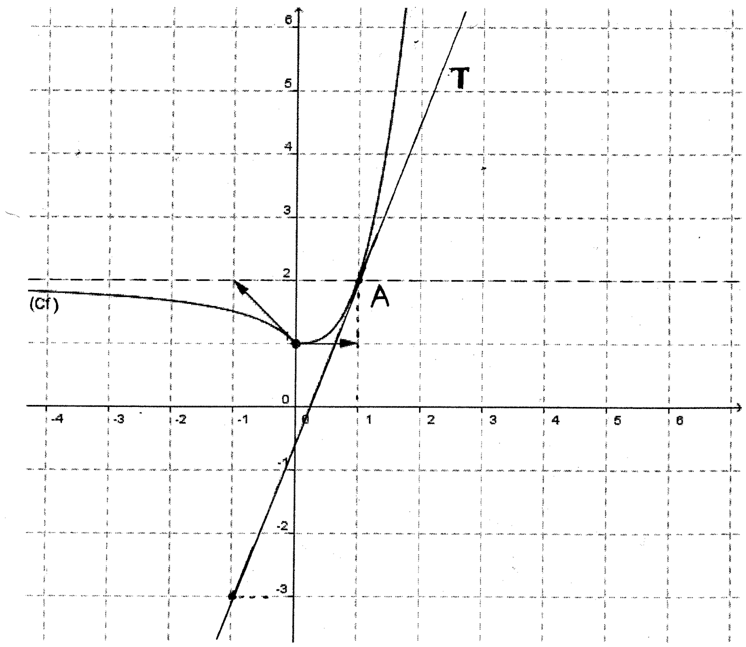
2/a- Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une solution unique α dans $[1;+\infty[$

b- Vérifier que $\alpha \in \left]1;\ 2\right[$.

3/ Montrer que $\forall x \in [2;+\infty[;\ f(x) - \alpha \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-\alpha)$.

EXERCICE 5 *D'après un devoir.*

On donne le graphique cidessous dans lequel C_f désigne la courbe d'une fonction f définie sur IR et T sa tangente au point A$(1, f(1))$.



1/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2/ Donner une équation cartésienne de T.

3/ Dresser le tableau de variation de f sur IR.

4/ Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$.

a- Montrer que g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b- Tracer la courbe de g^{-1} sur le même graphique puis dresser le tableau de variation de g^{-1}.

c- Calculer $(g^{-1})'(2)$.

d- g^{-1} est-elle dérivable à droite en 1? justifier votre réponse.

Exercice 6 *D'après un devoir*

1/ Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$

a- Dresser le tableau de variation de g.

b- En déduire que pour tout x $\in IR;$ $g(x) < 0$.

2/ Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x^2} - x + 1\right)$

a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

b- Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \dfrac{1}{2}g(x)$.

c- Montrer que pour tout x $\in IR^+;\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$

3/ Prouer que pour tout x $\in IR^+;\ |f(x) - 1| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-1|$.