L. B. Monastir	***Série n : 29***	*4 ^{ème} Math*
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :
Chapitres : Dérivabilité + Bijection + …		

Exercice 1

Dans la figure ci-dessous la courbe (C) d'une fonction f définie sur IR

1/ Par une lecture graphique et **sans justification** déterminer :

a- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ….. **b**- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

c- L'équation de l'asymptote Δ à la courbe (C) de f.

2/ Par une lecture graphique et *en justifiant* déterminer :

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

3/ Par une lecture graphique et *en justifiant* prouver qu'il existe un réel c $\in]-1;1[$ tel que $f'(c) = -2$.

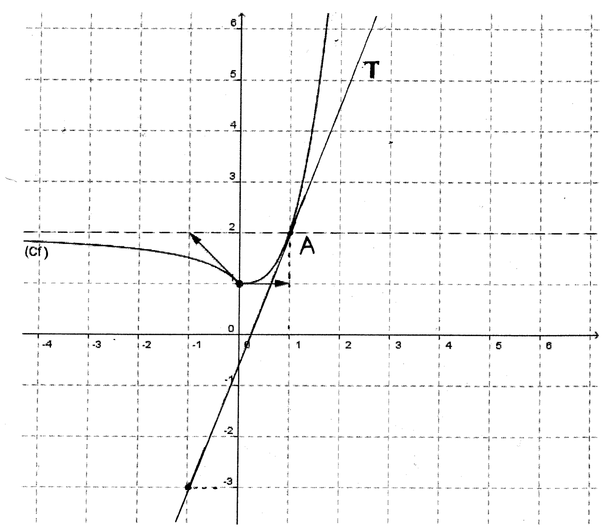
4/ Désignons par h la restriction de f sur $[1;+\infty[$.

a- Prouver que h réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $[1;+\infty[$.

b- Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur $]1;+\infty[$ et à droite en 1.

c- Tracer la courbe de h^{-1} sur le même graphique.

Exercice 2 D'après un devoir.



On donne le graphique cidessus dans lequel C_f désigne la courbe d'une fonc définie sur IR et T sa tangente au point A$(1, f(1))$.

1/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2/ Donner une équation cartésienne de T.

3/ Dresser le tableau de variation de f sur IR.

4/ Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$.

a- Montrer que g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b- Tracer la courbe de g^{-1} sur le même graphique puis dresser le tableau de variation de g^{-1}.

c- Calculer $(g^{-1})'(2)$.

d- g^{-1} est-elle dérivable à droite en 1? justifier votre réponse.

Exercice 3 *(D'après un parascolaire) (largement modifié)*

Soit f la fonction définie sur IR^+ par $f(x) = \dfrac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$.

I)1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/a- Montrer que f réalise une bijection de IR^+ sur $]0;\ 1]$.

b- Montrer que $\forall x \in]0;\ 1];\ f^{-1}(x) = \dfrac{1-x+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

3/ Pour tout $x \in]0;\ \frac{\pi}{2}]$, on pose $g(x) = f^{-1}(\sin x)$.

Montrer que $\forall x \in]0;\ \frac{\pi}{2}];\ g(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - 1 + \cot g(x)$.

4/ Montrer que g réalise une bijection de $]0;\ \frac{\pi}{2}]$ sur IR^+.

5/a- Soit y de $]0;\ \frac{\pi}{2}]$. On pose $x = g(y)$. Etablir que $y = f(x)$.

b- Monttrer que g^{-1} est dérivable sur IR^+ et que $g^{-1}(x) = \dfrac{-2}{x^2+2x+2}$.

II) Pour tout x de $]0,\ 1]$ on pose $h(x) = f^{-1}(\sqrt{x})$.

1/a- Montrer que h est dérivable sur $]0,\ 1[$ et calculer $h'(x)$.

b- Etudier la dérivabilité de h à gauche en 1.

2/ Pour tout n de IN^* on pose $v_n = \sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k h\left(\frac{1}{k}\right)$.

Montrer que $\forall n \in IN^*;\ v_n = \sqrt{2n}$. Donner alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE 4

Soit la fonction $f :]0;2[\to IR; x \mapsto \cot g\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1/ Dresser la tableau de variation de f.

2/ Prouver que f realise une bijection de $]0;2[$ dans un intervalle J à préciser.

3/ Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

4/ Calculer $(f^{-1})'(x); \forall x \in J$.

5/ Calculer $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f^{-1}(x)-1}{x}$.

6/ Calculer $f^{-1}(-1)$

7/ Soit $\varphi : IR^*_- \to IR; x \mapsto \varphi(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

a- Justifier que φ est dérivable sur IR^*_- puis calculer $\varphi'(x); \forall x \in IR^*_-$.

b- Déduire que $\forall x \in IR^*_-; f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = 3$.

8/ Soit la suite $(S_n)_{n\in IN^*}$ définie par $\forall n \in IN^*; S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a- Montrer que $\forall n \in IN^*; f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n \le f^{-1}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b- Déduire que (S_n) converge et preciser sa limite.