L. B. Monastir	**Série n : 30**	$4^{ème}$ **Math**
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :
Chapitres : Dérivabilité + …		

Exercice 1 *QCM*

1/

2/ (**d'après un devoir**) Soit f une fonction dérivable sur $[-2,2]$ dont le TV de f' est le suivant

a) f admet un maximum en 0

b) **f** est strictement décroissante sur $[-2,2]$.

b) **f** est strictement croissante sur $[-2,2]$.

3/ Soit f la fonction définie sur $[1,4]$ par $f(x) = \sqrt{x-1}\,(\sqrt{x} - 2)$ alors la courbe de f admet

a) Aucune tangente horizontale.

b) Au moins une tangente horizontale.

c) une demi tangente horizontale au point d'abscisse 1.

Exercice 2

1/ Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}\,;\ \forall x \in]0,+\infty[$

a) Mq $\forall x \in]0,+\infty[$ on a pour tout $t \in [x;\ x+1];\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) Déduire, à l'aide des inégalités d'accroissements finis, que

$$\forall x \in]0,+\infty[;\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2/Pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{2\sqrt{n}}$

i) Montrer que $\forall n \in IN^*\ , u_n \geqslant \sqrt{n+1} - 1$ ii) Trouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3 *D'après un devoir*

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par C_f sa courbe représentative de dans un RON.

1/**a**- Dresser le tableau de variation de f.

b- Etudier la position relative de C_f par rapport à la tangente T à la courbe à C_f au point $A(0,2)$.

2/**a**- Montrer que l'équation $f(x) = 3x$ admet dans $[-1,\ +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0,\ 1[$.

b- Construire T et C_f.

3/ Soit la suite (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 = \frac{\alpha}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}f(u_n)$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ 0 \prec u_n \prec 1$.

b- Démontrer que $\forall x \in [0,1]$ on a $|f'(x)| \leqslant 2$, en déduire que $\forall n \in IN;\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

c- Démontrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 d'après un devoir

Soit la fonction f définie sur $\left[O;\frac{1}{3}\right]$ par $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$

1/a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution α dans $\left]O;\frac{1}{3}\right[$.

c- Prouver que $\forall x\in\left[O;\frac{1}{3}\right]$; $|f(x)-\alpha|\leqslant\frac{1}{2}|x-\alpha|$

2/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0=\frac{1}{3}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$; $\forall n\in IN$

a- Montrer que $\forall n\in IN;\ O\prec u_n\leqslant\frac{1}{3}$ et $u_n\neq\alpha$

b- Prouver que $\forall n\in IN;\ |u_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$ (on pourra profiter de la question **1/c**-)

c- Montrer donc que (u_n) converge vers α.

3/ Montrer que $\underset{n\to+\infty}{Lim}\left[\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right]=+\infty$.

Exercice 7 *D'après un devoir*

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & \text{si } x\in]-\infty;\ -1[\\ -x^3+3x+3 & \text{si } x\in[-1;+\infty[\end{cases}$

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f.

2/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et interpréter graphiquement le résultat

3/a- Montrer que f est dérivable sur $IR\backslash\{-1\}$ et déterminer f'

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Montrer que $I(0;\ 3)$ est un point d'inflexion de C_f.

d- Ecrire l'équation de la tangente T à C_f en I et étudier sa position par rapport à C_f sur $]-1,+\infty[$.

4/ On pose pour $x\succ 0,\ h(x)=f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

a- Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$.

b- Montrer que h est dérivable sur IR_+^* et déterminer h'.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $[0,\ +\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$

1/a- Vérifier que pour tout $x\succ 0;\ f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$

b- Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3/a- Vérifier que $\forall x\succ 0;\ f'(x)\succ 0$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Tracer l'allure de C_f la courbe de f.

4/ Soit g :$[0;\ \frac{\pi}{2}[\to IR;\ x\mapsto g(x)=f\left[\frac{1}{\cos x}\right]$

a- Justifier la dérivabilité de g sur $[0;\ \frac{\pi}{2}[$.

b- Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}g(x)$. **c**- Dresser le tableau de variation de g.