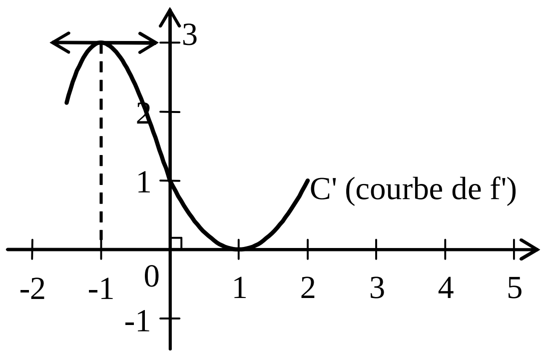
L. B. Monastir	Série n : 31	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :
Chapitres : Dérivabilité + ...		

Exercice 1

Dans la figure ci-dessous: C' la courbe représentative de f' la fonction dérivée de f de courbe C passant par par le point A$(0; f(0) = 2)$.
f est deux fois dérivable sur $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$.



1/**a**- Prouver que l'équation de T la tangente à C en A a pour équation $y = x + 2$

b- Donner une valeur approchée de f$(0,001)$

2/ Expliquer puis donner le tableau de signe de $(f(x) - 2)$ pour x $\in \left[-\frac{3}{2}; 2\right]$

3/**a**- Montrer que le point A$(0; 2)$ n'est pas un point d'inflexion de C.

b- Montrer que C admet deux points d'inflexions.

4/ Sachant que f$\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$ montrer que $\forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right]; |f(x)| \leqslant 3x + \frac{9}{2}$.

Exercice 2

On considère a présent la fonction f définie sur IR par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1/ Dresser le tableau de variation de f

2/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une solution unique α dans $[1; +\infty[$

3/ On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n); \forall n \in IN$.

a) Montrer que $\forall n \in IN; u_n > 1$.

b)**i**- Vérifier que $\forall x \in [1; +\infty[$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

ii- Montrer que $\forall n \in IN; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.

c)**i**- ....

ii- La suite (u_n) est-elle convergente? si oui donner sa limite.

Exercice 3 *D'après un devoir*

b- Montrer que h est dérivable sur IR_+^* et déterminer h'

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

C$_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé R.

1) **a**) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Vérifier que $\forall x \succ 1; f'(x) = \dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Prouver que C_f n'a pas de point d'inflexion?

e) Tracer C_f .

2) Montrer que $\forall k \geqslant 2$ on a : f '(k)$\leqslant f(k+1)-f(k) \leqslant$ f '(k+1)

3) **a**) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution α dans]2 , 3[.

b) Pour tout t ∈ [2 , 3] donner un encadrement de $f'(t)$

c) Montrer alors que pour tout x ∈[2 , 3], on a : $|f(x)-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{3\sqrt{3}}|x-\alpha|$

Exercice 4 *D'après un devoir*

Soit f est une fonction définie,continue sur $\left]0,+\infty\right[$ *et dérivable sur les intervalles* $\left]0,2\right[$ *et* $\left[2,+\infty\right[$.

(C) est la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction dérivée f ' de f.

x	0		1		2		4		$+\infty$
f'	|| $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ || 1	↘	0	↘	$-\infty$

1.Déterminer l'extremum de f et l'abscisse du point d'inflexion de (C).

2.Comparer f (2) et f (4) en justifiant.

3.Montrer que f (4) $\leq$ 2 + f (2) (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).

4.Donner le signe de f ' (x) puis dresser le tableau de variation de f sachant que f (1) = 2 , f (2) = 1 , f (4) = 2 , $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty$.

5.On donne $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$*.Donner l'allure de (C) en précisant le points remarquables et les demi-tangentes.*

Exercice 4 *D'après un devoir*

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par C_f sa courbe représentative de dans un RON.

1/a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Etudier la position relative de C_f par rapport à la tangente T à la courbe à C_f au point $A(0,2)$.

2/a- Montrer que l'équation $f(x) = 3x$ admet dans $[-1, +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0, 1[$.

b- Construire T et C_f.

3/ Soit la suite (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 = \dfrac{\alpha}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} f(u_n)$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ 0 \prec u_n \prec 1$.

b- Démontrer que $\forall x \in [0,1]$ on a $|f'(x)| \leqslant 2$,

en déduire que $\forall n \in IN;\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$

c- Démontrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5 *D'après un devoir*

Soit la fonction f : $x \mapsto f(x) = \sqrt{x+3}\,;\ \forall x \geqslant 0$.

1/a- Donner le tableau de signe de $f''(x);\ \forall x \geqslant 0$.

b- La courbe de f admet-elle des points d'inflexions ?

2/ Montrer que $\forall x \geqslant 0;\ 0 \prec f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3/ Déterminer le réel α solution de l'équation $f(x) = x$

4/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par :$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$;$\forall n \in IN$

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \prec \alpha$.

b- Prouver que $\forall n \in IN;\ 0 \prec \alpha - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(\alpha - u_n)$.

c- Déduire que $\forall n \in IN;\ 0 \prec \alpha - u_n \leqslant \alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

d- Prouver que (u_n) converge.

Exercice 6 *D'après un devoir*

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique a. Vérifier que $1 \langle a \langle 2$.

b) montrer que pour tout x de [1,2] on a : $f(x) \in [1,2]$ et que $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

2) Soit U la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout entier n on a : $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Montrer que pour tout entier n on a : $|U_n - a| \leq (\dfrac{1}{2})^n$.

c) Montrer que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

3) Pour tout entier naturel n on pose $t_n = (-1)^n (U_n - a)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$

a) Montrer que pour tout entier n on a : $U_{2n+1} \leq a \leq U_{2n}$.

En déduire $t_n \geq 0$, pour tout entier naturel n.

b) Montrer que pour tout entier n on a : $S_n \geq 0$ et que S_n est croissante.

c) Montrer que $S_n \leq 2$ et que la suite (S_n) est convergente.

Exercice 7

Soit la fonction *f* définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$

1/a- Vérifier que pour tout $x \succ 0$; $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$

b- Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2/ Etudier la dérivabilité de *f* à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3/a- Vérifier que $\forall x \succ 0$; $f'(x) \succ 0$

b- Dresser le tableau de variation de *f*.

c- Tracer l'allure de C_f la courbe de *f*.

4/ Soit g :$[0; \frac{\pi}{2}[\to IR$; $x \mapsto g(x) = f\left[\frac{1}{\cos x}\right]$

a- Justifier la dérivabilité de g sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

b- Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)$.

c- Dresser le tableau de variation de g.

EXERCICE 5

On considère a présent la fonction f définie sur IR par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1/ Dresser le tableau de variation de f

2/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une solution unique α dans $[1;+\infty[$

3/ On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n); \forall n \in IN.$

a) Montrer que $\forall n \in IN; u_n > 1.$

b)**i**- Vérifier que $\forall x \in [1;+\infty[$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

ii- Montrer que $\forall n \in IN; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|.$

c)**i**- Montrer par récurrence que $\forall n \in IN; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$

ii- La suite (u_n) est-elle convergente? si oui donner sa limite.