L. B. Monastir	Série n : 22	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaier		....
Chapitres : **bijection + ...**		

EXERCICE 1 *D'après un devoir.*

Soit f : $[1;+\infty[\to IR$; x $\mapsto -1+\sqrt{x^2-1}$ et désignons par C_f la courbe de de f dans un repère orthonormé R.

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

2/ Calculer $f'(x)$; $\forall x \in]1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.

3/ Montrer que $D : y = x-1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

4/**a**- Montrer que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

5/ Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$ et vérifier que $2<\alpha<3$.

6/ Soit g la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

a- Montrer que g est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

b- En déduire que $g(x) = -1+\tan(x)$; $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$.

EXERCICE 2

Soit $f : x \mapsto -2\sin^2 x - 1$

1/ Mq f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{3};0\right]$ dans un intervalle J à préciser.

2/ Etudier la continuité de f^{-1} ainsi que son sens de variation.

3/ Calculer $f^{-1}(-2)$.

4/ Prouver que f^{-1} est <u>seulement</u> dérivable sur J\{-1}.

5/**a**- $\forall x \in J$, exprimer, en fonction de x, $\sin[f^{-1}(x)]$ ainsi que $\cos[f^{-1}(x)]$.

b- Calculer donc $(f^{-1})'(x), \forall x \in$ J\{-1}.

EXERCICE 3

Pour tout réel x on pose $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

1/ Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$

2/**a**- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$; déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Tracer C_f (courbe de f) dans un même repère orthonormé R.

3/ Donner une équation cartésienne de T la tangente à C_f en son point d'abscisse 0.

4/**a**- Prouver que f réalise une bijection de IR sur $]-1;0[$.

b- Tracer $C_{f^{-1}}$ (courbe de f^{-1}) dans le même repère.

c- Donner une équation cartésienne de T' la tangente à $C_{f^{-1}}$ en son point d'abscisse - $\frac{1}{2} = f(0)$.

5/ Expliciter $f^{-1}(x)$; $\forall x \in]-1;0[$.

EXERCICE 4

Soit la fonction $f :]0;2[\to IR; x \mapsto \cot g\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1/ Dresser la tableau de variation de *f*.

2/ Prouver que *f* realise une bijection de $]0;2[$ dans un intervalle J à préciser

3/ Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

4/ Calculer $(f^{-1})'(x); \forall x \in J$.

5/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^{-1}(x)-1}{x}$.

6/ Calculer $f^{-1}(-1)$

7/ Soit $\varphi : IR_-^* \to IR; x \mapsto \varphi(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

a- Justifier que φ est dérivable sur IR_-^* puis calculer $\varphi'(x); \forall x \in IR_-^*$.

b- Déduire que $\forall x \in IR_-^*; f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = 3$.

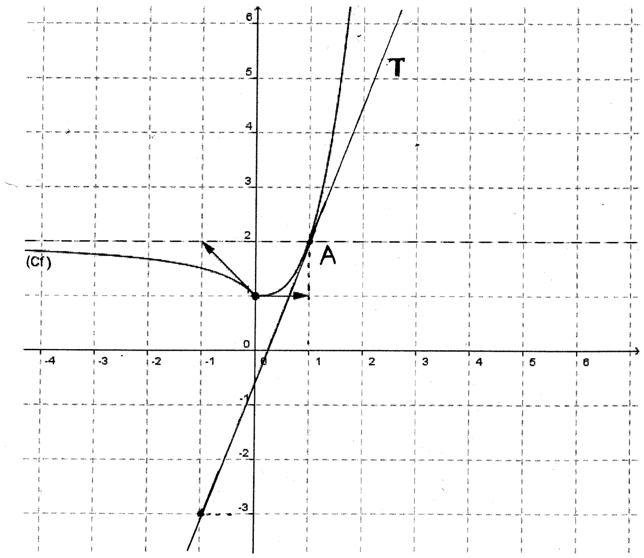
8/ Soit la suite $(S_n)_{n\in IN^*}$ définie par $\forall n \in IN^*; S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a- Montrer que $\forall n \in IN^*; f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n \le f^{-1}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b- Déduire que (S_n) converge et preciser sa limite.

<u>EXERCICE 5</u> *D'après un devoir.*

On donne le graphique cidessous dans lequel C_f désigne la courbe d'une fonction f définie sur IR et T sa tangente au point A$(1, f(1))$.



1/ Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2/ Donner une équation cartésienne de T.

3/ Dresser le tableau de variation de f sur IR.

4/ Soit g la restriction de f sur $[0, +\infty[$.

a- Montrer que g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b- Tracer la courbe de g^{-1} sur le même graphique puis dresser le tableau de variation de g^{-1}.

c- Calculer $(g^{-1})'(2)$.

d- g^{-1} est-elle dérivable à droite en 1? justifier votre réponse.

EXERCICE 6

On considère la fonction *f* définie sur $[-1; +\infty[$ par $\begin{cases} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} & si\ x \in\ ]0; +\infty[\\ 2 - \cos \pi x & si\ x \in [-1; 0] \end{cases}$

1/**a**- Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* en 0.

b- Dresser le tableau de variation de *f*.

2/**a**- Mq réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ dans un intervalle J que l'on precisera.

b- Déterminer $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

3/ Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour $x \in\ ]0, 1[$.

4/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J puis déterminer $(f^{-1})'(x)$.

5/ Soit $x \in [1;3]$.

a- Justifier l'éxistance de $f^{-1}(4-x)$.

b- On pose $g(x) = f^{-1}(4-x) + f^{-1}(x)$. Montrer que g est dérivable sur $]1;3[$ et calculer $g'(x)$.

c- En déduire que $g(x)$ est une constante à déterminer .

6/a- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0;+\infty[$ une solution unique x_0.

b- Vérifier que $x_0 \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$.

7/ Posons (u_n) la suite définie sur IN par :$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f \circ f(u_n)$;$\forall n \in IN$.

a- Prouver que x_0 est l'unique solution de $f \circ f(x) = x$ dans $[0;+\infty[$.

b- Montrer que $\forall n \in IN; 0 \leq u_n < x_0$.

c- Etudier la monotonie de (u_n).

d- Montrer donc que (u_n) converge et que sa limite est x_0.

Exercice 7

Dans la figure ci-dessous la courbe (C) d'une fonction f définie sur IR

1/ Par une lecture graphique et **sans justification** déterminer :

a- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$..... **b**- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

c- L'équation de l'asymptote Δ à la courbe (C) de f.

2/ Par une lecture graphique et *en justifiant* déterminer :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-1}{x-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-1}{x-1}.$$

3/ Par une lecture graphique et *en justifiant* prouver qu'il existe un réel c $\in]-1;1[$ tel que $f'(c) = -2$.

4/ Désignons par h la restriction de f sur $[1;+\infty[$.

a- Prouver que h réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $[1;+\infty[$.

b- Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur $]1;+\infty[$ et à droite en 1.

c- Tracer la courbe de h^{-1} sur le même graphique.

Exercice 8

Soit la fonction g définie sur $]0;\frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = \sin x - \frac{1}{x}$.

1/ Montrer que l'équation g$(x) = 0$ possède une seule solution α et que $\alpha > 1$.

2/ Désignons par h la bijection réciproque de g .

a- Préciser le sens de variation de h .

b- Etudier la dérivabilité de h sur J=$]-\infty; 1-\frac{2}{\pi}]$.

c- Montrer que h'$(0) = \dfrac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}+1}$.

3/ Soit la fonction ψ :$]-\frac{\pi}{2},0[\to$ IR; $x \mapsto h\left[\ tg(x)\right]$.

a- Justifier la dérivabilité de ψ sur $]-\frac{\pi}{2},0[$.

b- Dresser le tableau de variation de ψ.

4/ Soit $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{1}{k+4}\right); \forall n \in IN^*$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$.

Exercice 9 *(D'après un parascolaire) (largement modifié)*

Soit f la fonction définie sur IR^+ par $f(x) = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$.

I)1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/a- Montrer que f réalise une bijection de IR^+ sur $]0;\ 1]$.

b- Montrer que $\forall x \in]0;\ 1];\ f^{-1}(x) = \frac{1-x+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

3/ Pour tout $x \in]0;\ \frac{\pi}{2}]$, on pose $g(x) = f^{-1}(\sin x)$.

Montrer que $\forall x \in]0;\ \frac{\pi}{2}];\ g(x) = \frac{1}{\sin(x)} - 1 + \cot g(x)$.

4/ Montrer que g réalise une bijection de $]0;\ \frac{\pi}{2}]$ sur IR^+.

5/a- Soit y de $]0;\ \frac{\pi}{2}]$. On pose $x = g(y)$. Etablir que $y = f(x)$.

b- Monttrer que g^{-1} est dérivable sur IR^+ et que $g^{-1}(x) = \frac{-2}{x^2+2x+2}$.

II) Pour tout x de $]0,\ 1]$ on pose $h(x) = f^{-1}(\sqrt{x})$.

1/a- Montrer que h est dérivable sur $]0,\ 1[$ et calculer $h'(x)$.

b- Etudier la dérivabilité de h à gauche en 1.

2/ Pour tout n de IN^* on pose $v_n = \sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k h\left(\frac{1}{k}\right)$.

Montrer que $\forall n \in IN^*;\ v_n = \sqrt{2n}$. Donner alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\sqrt{n}}$.

Problème

Soit l'application $f\ :\ ]0;\pi[\ \to IR; x \mapsto \cot gx$.

1/a- Montrer que f est bijective.

b- Soit g la réciproque de f; étudier sa continuité,son sens de variation et sa dérivabilité ainsi que $\lim\limits_{+\infty} g$.

c- Calculer $g'(x); \forall x \in IR$. **d**- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x) - \frac{\pi}{2}}{x}$.

2/ Soit h la fonction définie sur IR^+ par $h(x) = g(\sqrt{x})$

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de h.

b- Déterminer la fonction dérivée de h' de h et donner le sens de variation de h.

3/ Pour $n \in IN^*$ on pose $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(n+i)$.

a- Montrer que $\forall n \in IN^*; h(2n) \le u_n \le h(n)$.

b- En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

4/ Soit la fonction $F\ :\ IR^+ \to \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; x \mapsto \begin{cases} g\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

a- Montrer que F est continue sur IR^+.

b- Etudier le sens de variation de F.

c- Soit $(a,b) \in IR_+^* \times IR_+^*$ tel que $a < b$.

Montrer que $0 < F(b) - F(a) < \frac{\pi}{2}$ et $\cot g(F(b) - F(a)) = \frac{1+ab}{b-a}$.

d- Pour tout $n \in IN$, on pose $v_n = F\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

i) Etudier la convergence de (v_n).

ii) Montrer que $\forall n \in IN^*; v_n = F(n+1) - F(n)$.

iii) On pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i$ .Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.