| L. B. Monastir | Série n : 33 | $4^{ème}$ Math |
|---|---|---|
| P.P. : Ali Zouhaïer | | Séance n : |

Chapitres : Dérivabilité + déplacement + antidépl+ suite + ...

## EXERCICE 1

Soit $\theta$ un réel *et* $(E_\theta)$ : $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$ on désignant par $z'_\theta$ et $z''_\theta$ les solutions de $(E_\theta)$ avec z" la solution qui s'unnule quand $\theta = \frac{\pi}{2}$.

**1**/ *Sans résoudre* $(E_\theta)$ dire pouquoi $\arg(z'_\theta + z''_\theta) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

**2**/**a**- Vérifier que $z'_\theta = i + e^{i\theta}$.

**b**- Trouver alors $z''_\theta$.

**3**/ Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, $M'_\theta$ et $M''_\theta$ d'affixes respectives $i$, $i + e^{i\theta}$ et $i - e^{i\theta}$.

Soit l'ensemble $(E') = \left\{M'_\theta \text{ quand } \theta \text{ varie sur } ]0, \frac{\pi}{2}]\right\}$. Déterminer $(E')$.

**4**/ Soit f : P → $P$; $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = -z + 2i$

**a**- Montrer que f est une isométrie

**b**- Chercher les points fixes par f.

**c**- Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

**5**/**a**- Vérifier que $M''_\theta = f(M'_\theta)$

**b**- Déterminer *alors* puis construire l'ensemble $(E'') = \{M''_\theta$ quand $\theta$ varie sur $IR\}$.

## EXERCICE 2

Dans le plan orienté,on considère un triangle $ABC$ tel que $AB = AC$ et $\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$ .Soit $I$ le point tel que le triangle $CAI$ soit isocèle et rectangle avec $\widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI})} \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

**1**/ Mq il existe une seule rotation $f$ telle que $f(A) = I$ et $f(B) = C$

**2**/ Déterminer son angle et construire son centre $O$.

**3**/ Quelle est la nature de $OBAC$ ?

**4**/ Soit $\Delta$ la perpendiculaire à $(BC)$ en $B$. Soit $g = f \circ S_\Delta$ et $H$ le projeté orthogonal de $B$ sur $(OC)$.

**a**- Mq $g$ n'a pas de points fixes et préciser la nature de $g$.

**b**- Mq $g = S_{(OC)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$.

**c**- Déterminer la forme réduite de $g$.

## EXERCICE 3

$ABCD$ est un carré direct de centre O et $I = A * D$, $J = B * A$, $K = C * D$, F est le symétrique de $B$ par rapport à A et $E$ est le symétrique de $C$ par rapport à $D$.

**1**/**a**- Montrer qu'il existe une seule rotation $R$ telle que $R(B)$=$D$ et $R(C)$=$E$.

**b**- Déterminer le centre de $R$.

**c**- Soit I'=R($I$). Prouver que I'=A$*F$.

**2**/ Soient $M$ point variable sur $[BC]$ et $N$ la point de $(DC)\backslash[DC)$ tel que $DN$=$BM$.

Montrer que quand $M$ varie sur $[BC]$, la médiatrice du $[MN]$ passe par un point fixe.

**3**/ Posons $\varphi = R \circ S_{(AB)}$.

**a**- Calculer $\varphi(A)$, déduire que $\varphi$ est une symétrie orthogonale.

**b**- Déterminer l'axe de $\varphi$.

**c**- Soit $M_1 = S_B(M)$, Montrer que $\varphi(M_1) = N$.

**4**/ Soit $\psi = R \circ S_{(IJ)}$.

**a**- Montrer que $\psi$ est une symétrie glissante.

**b**- Déterminer l'axe $\Delta$ et le vecteur $\vec{u}$ de $\psi$.

## EXERCICE 4

D'après un devoir

Dans le plan orienté on considère un losange ABCD de centre O tel que

$\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$.

**1/a**) Identifier les deux isométries R=$S_{(DC)} \circ S_{(DJ)}$ et T = $S_{(OJ)} \circ S_{(DC)}$.

**b**) Montrer que f = $T \circ R$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

**2**/ Soit M un point du segment $[AB]$ et N un point du segment $[BC]$ tel que AM=BN et Q le point tel que IDNQ soit un parallélogramme.

**a**) Préciser R$(M)$, en déduire f$(M) = Q$.

**b**) Donner la nature du triangle JMQ.

**3**/ Soit g l'isométrie du plan tel que g$(A) = D$, g$(B) = C$ et g$(D) = B$.

**a**) Montrer que g est un antidéplacement.

**b**) Montrer que g$(O) = J$ et g$(K) = O$ puis identifier $t_{\overrightarrow{JO}} \circ g$.

**c**) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

**4**/ On note $h = R^{-1} \circ g$ et $\varphi = S_{(AD)} \circ R^{-1} \circ g$.

Déterminer h$(B)$ et h$(K)$ puis identifier h et $\varphi$.

*EXERCICE 5* •

Dans le plan orienté on considère un carre ABCD de centre I et de sens direct . on désigne par J et K les milieux respectifs des cotés [AD] et [CD] , soit E le point du plan tel que DBE soit un triangle équilatéral de sens direct

**1**/ On pose $\Psi = t_{\overrightarrow{BC}} o S_{(AC)}$

**a**- Déterminer $\Psi(A)$ et $\Psi(B)$.

**b**- En déduire que $\Psi$ est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

**2**/**a**- Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoi B sur A et A sur D.

**b**- Caractériser R.

**3**/ On pose g=$R_{(B,\frac{\pi}{6})} o R_{(E,\frac{\pi}{3})}$. Caractériser g.

**4**/ Soit r=$R_{(I,\frac{\pi}{2})}$ et on pose $t = g \circ r^{-1}$

**a**- Déterminer t(A) puis caractériser t.

**b**- Pour tout M du plan , on pose $M_1 = r(M)$ et et $M_2 = g(M)$.

quelle est la nature de quadrilatère $ABM_2M_1$.

*EXERCICE 6* bac 2005 session principale

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne le point $A$ d'affixe 1. Soit l'application $f$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

**1**) Déterminer la nature de $f$ et préciser ses éléments caractéristiques.

**2**) Soit le point $M_0$ d'affixe 2. On pose pour tout entier naturel $n$, $M_{n+1}=f(M_n)$. On désigne par $z_n$ l'affixe de $M_n$ et par $Z_n$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$

**a**- Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

**b**- Montrer que pour tout $n \in IN$, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

**c**- En déduire l'ensemble des valeurs de $n$ pour lesquelles les points $A, M_0$ et $M_n$ sont alignés.

*EXERCICE 7*

On considère,dans le plan orienté,un triangle équilatéral $ABC$ tel que

$\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. Soit $\Omega = S_{(AC)}(B)$.

*I*/ On concidère $R$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui envoie $A$ en $C$.

**1**/ Mq $\Omega$ est le centre de $R$.

**2**/ Soit $D = R(B)$. Montrer que $C$ est le milieu de $A$ et $D$.

**3**/ A tout point $M$ du segment $[AB]$ avec $M \neq A$ et $M \neq B$. On associe le point $M'$ du segment $[CD]$ tel que $AM = CM'$.
Montrer que $\Omega MM'$ est un triangle équilatéral.

*II*/ On pose $O = A * C; K = B * D$ et $H = \Omega * D$.

**1**/ Montrer qu'il existe un seul antidéplacement $f$ tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$.

**2**/ Construire le point $C' = f(C)$

**3**/ Montrer qu $f$ n'a pas de point fixe. Soit $S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ la forme réduite de $f$

**a**- Vérifier que $\Delta$ est la médiatrice de $[BH]$.

**b**- Déterminer $t_{\vec{u}}(H)$. Donner la forme réduite de $f$.

**4**/ Soit $g = f \circ S_{(BC)}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g$.

*EXERCICE 8*

Soit f la fonction définie sur ]1 , +∞[ par $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

**1**) **a**) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Interpréter ces résultats graphiquement.

**b**) Dresser le tableau de variation de f.

**c**) **C**$_f$ admet-elle des points d'inflexions ? Justifier votre réponse

**d**) Tracer dans un repère orthonormé la courbe $C_f$.

**2**)**a**) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution α et que α ∈ ]2 , 3[.

**b**) Montrer que pour tout x ∈ [2 , 3], on a : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

**3**) Soit la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ définie par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{-1}{\left(\sqrt{k^2 - 1}\right)^3}$

**a**) Montrer que $\forall k \geqslant 2;\ f'(k+1) \geqslant f(k+1) - f(k) \geqslant f'(k)$

**b**) Déduire que $\forall n \geqslant 2;\ f(n) - f(2) + f'(n) \geqslant S_n \geqslant f(n) - f(2) + f'(2)$

**c**) Prouver que $(S_n)$ est convergente.

**4**) Soit u la suite définie par et $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n);\ \forall n \in IN$

**a**) Montrer que pour tout n ∈ $IN$ , on a : $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.

**b**) Montrer que pour tout n ∈ $IN$ , on a : $0 \leqslant |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{3\sqrt{3}}|u_n - \alpha|$

**c**) En déduire que u est convergente et calculer sa limite.

*EXERCICE 9*

Soit $(u_n)_{n \in IN^*}$ une suite réelle définie sur sur IN* par :
$u_1 = \dfrac{\pi}{2}; u_2 = 1$ et $u_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}u_n; \forall n \in IN^*$.

**On admet que** $(u_n)_{n \in IN^*}$ est **décroissnte** sur IN*.

**1**/ Montrer par récurrence que $\forall n \in IN^* \backslash \{1\}; u_n > 0$.

**2**/ Etudier la convergence de $(u_n)$.

**3**/ Montrer que $\forall n \in IN^*; \dfrac{2n}{2n+1} \leq \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$.

**4**/ Préciser donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[ \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \right]$.

**5**/ Exprimer $u_{2n+1}$ puis $u_{2n+2}$ en fonction de $n$.

**6**/ Montrer, en conclusion, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[ \left( \dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)} \right)^2 \times \dfrac{2}{2n+1} \right] = \pi$

*EXERCICE 13*

Soit $f$ une fonction définie et continue sur $[-1;1]$; dérivable sur $]-1;1[$ et vérifiant $f(0) = 0$ et $\forall x \in\ ]-1;1[; f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**1**/ Montrer que f est impaire. ( On pourra étudier les variations de la fonction $F : x \mapsto f(x) + f(-x)$ ).

**2**/**a**) Vérifier que le T.A.F. est applicable à $f$ sur $[-1, x]; \forall x \in\ ]-1;1[$
(T.A.F. signifie thérème des accroissements finis)

**b**) A l'aide du T.A.F. prouver que $f$ n'est pas derivable en -1.

**3**/ Procéder de même pour justifier la non dérivabilité de $f$ en 1.

**4**/ On pose $g(x) = \sin x,$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

**a**- Etudier la continuité de $f \circ g$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et la dérivabilité de $f \circ g$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

**b**- Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$ on a $(f \circ g)(x) - x = 0.$

**c**- Déterminer alors $f(1)$ et $f(-1)$.

**5**/ Soit la suite $(S_n)_{n\in IN^*}$ définie par $\forall n \in IN^*; S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n^2}\right).$

Donner un encadrement de $S_n$ puis préciser sa limite.

*EXERCICE 14*

Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques à variable réelle, continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a,b[$ et tel que $\forall x \in ]a,b[,\ g'(x) \neq 0.$

On définit alors la fonction $\varphi$ sur $[a,b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a))\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

**1**/ Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

**2**/ Calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x$ de $]a,b[$.

**3/a**- Montrer qu'il existe un réel $c$ de $]a,b[$ par $\varphi'(c) = 0.$

**b**- En déduire que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

**4**/ En déduire de ce qui précède que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \sin x}{x^3}\right) = \frac{1}{6}$( on pourra poser $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = x^3$).

*EXERCICE 15* D'apèrs un devoir

Soit $f$ une fonction dérivable sur $IR$ vérifiant $f(0) = 0$ et $\forall x \in IR; f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

**I** ]**1**/ Montrer que $f$ est impaire. ( On pourra étudier les variations de la fonction $F : x \mapsto f(x) + f(-x)$ ).

**2/a**- Prouver que $f(1) \leq 1.$ (on pourra utiliser les inégalités des accroissements finis)

**b**- En étudiant les variations de la fonction K définie sur $[1;+\infty[,$ par $K(x) = f(x) + \frac{1}{x},$ montrer que f est majorée sur $[1;+\infty[$.

**c**- En déduire que f admet une limite $\ell$ en $+\infty$.

**II** ] Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) + f(\frac{1}{x});\ \forall x \in IR^*.$

**1/a**- Etudier les variations de g. **b**- Déduire que $\ell = 2f(1).$

**2**/ On pose $h(x) = tgx,$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

**a**- Montrer que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (f \circ h)(x) = \ell$

**b**- Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$ on a $(f \circ h)(x) = x.$

**c**- En déduire la valeur de $\ell$ puis de $f(1)$.

**3**/ Construire la courbe $(C)$ de f dans un repère orthonormé.

**III** ] **1**/ Montrer que l'équation $f(x) = 2x - 1$ admet une solution unique a dans ]0,2[.

**2**/ Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in IN$ on a $-1 + u_{n+1} = f\left(\frac{1}{2}u_n\right)$

**a**- Montrer que $\forall n \in IN$ on a $u_n \in [0,2]$.

**b**- Montrer que $|u_{n+1} - 2a| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2a|.$

**c**- Déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et préciser sa limite.

## *Exercice 16*

Soit la fonction f définie sur $\left[O;\frac{1}{3}\right]$ par $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

**1/a**- Dresser le tableau de variation de f.

**b**- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution $\alpha$ dans $\left]O;\frac{1}{3}\right[$

**c**- Prouver que $\forall x \in \left[O;\frac{1}{3}\right];\ |f(x)-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x-\alpha|$

2/ Soit la suite $(u_n)$ définie sur IN par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ ; $\forall n \in IN$

**a**- Montrer que $\forall n \in IN;\ O \prec u_n \leqslant \frac{1}{3}$ et $u_n \neq \alpha$

**b**- Prouver que $\forall n \in IN;\ |u_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$ ( on pourra profiter de **1**/**c**-)

**c**- Montrer donc que $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

**3**/ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right] = +\infty.$

## Exercice 17

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A le point $d'affixe\ -i.\ Pour$ tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ on désigne par $f_\theta$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe z associe $f_\theta(z) = z^2+2iz+e^{2i\theta}-1$

**I** -1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f_\theta(z) = 0$ on désignera par $z'_\theta$ et $z''_\theta$ les solutions avec $z''_\theta$ la solution qui s'annule pour $\theta = 0$.

**2**/ Donner la forme exponentielle de $z''_\theta$.

**3**/ Soit $M''_\theta$ le point d'affixe $z''_\theta$. Déterminer la valeur de $\theta$ pour que $OAM''_\theta$ soit isocèle en O.

**II** - **Dans cette partie on prend** $\theta = 0$ et on note g l'application $f_0$

Ainsi $g(z) = z^2+2iz$.

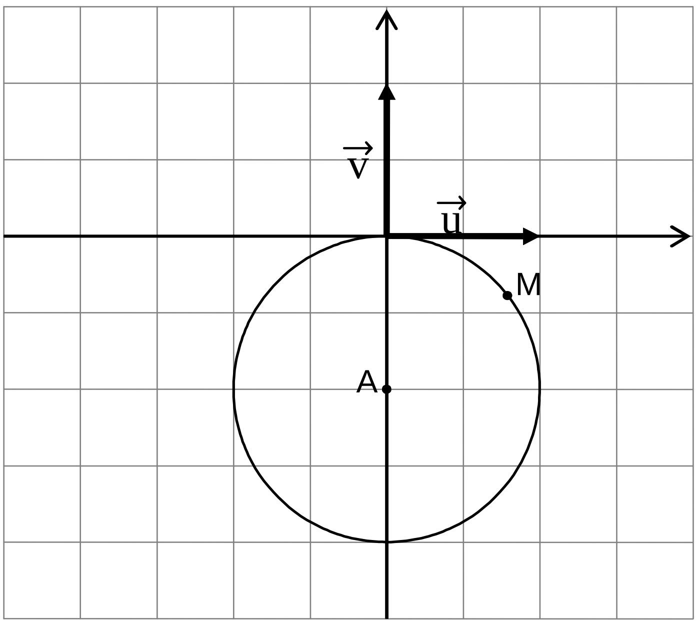
**1**/ Déterminer $z_B$ l'affixe du point B tel que $z_B = g(z_A)$.

**2**/ Soit M un point d'affixe z on note M' le point d'affixe $g(z)$.

**a**- Montrer que $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 2\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)}\ \ [2\pi]$.

**b**- Montrer que si $M(z)$ appartient au cercle de centre A et de rayon 1 alors M' appartient au cercle de centre B et de rayon 1.

**c**- Expliquer puis construire M' image de M ( compléter la figure )




## Exercice 18 Vrai - Faux

**1**/ Soit $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$ deux suites réelles à valeurs dans $[0;1]$ et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}[u_n \times v_n] = 1$.

**a**- $\forall n \in IN;\ u_n \times v_n \leqslant v_n \leqslant 1$ ☐

**b**- $(v_n)$ est divergente ☐

**2**/ Si z est un nombre complexe différent de 1 et de module 1 alors $\frac{z+1}{z-1}$

est un imaginaire pur ☐

**3**/ Quand $\theta$ varie sur $]0;\pi]$ le point M$(e^{-i\theta}+e^{i\theta})$ varie sur un arc d'un cercle ☐

**4**/ Si f est une fonction continue sur IR tel que l'équation f$(x)$ =0 admet une seule solution dans IR alors f est strictement monotone sur IR. ☐

*Exercice 19*

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 1 + \frac{2}{u_n}$ ou n$\in IN$

**1**/ Montrer par récurrence que $\forall n \in IN;\ u_n \geqslant 1$.

**2**/ Mq $(u_n)$ est croissante.

**3/a**- Etablir que $\forall n \in IN;\ 1 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant 3$

**b**- Montrer par récurrence que $\forall n \in IN;\ n+1 \leqslant u_n \leqslant 3n+1$.

**4**/ Calculer la limite de $(u_n)$.

**5**/ On pose pour tout n de IN :

$$v_n = \frac{(-1)^0}{u_0} + \frac{(-1)^1}{u_1} + \frac{(-1)^2}{u_2} + \ldots + \frac{(-1)^{2n}}{u_{2n}} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{u_{2k}} \text{ et } w_n = v_n - \frac{1}{u_{2n+1}}$$

**a**) Montrer que $(v_n)$ et $(w_n)$ sont adjacentes.

**b**) Donner un encadrement de L=$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

## EXERCICE 4 (4 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**1/a**- Montrer que pour tout $x \in IR$; f'$(x)$=$\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$

**b**- Dresser le tableau de variation de *f*.

**2**/ Montrer que $A(0,1)$ est un point d'inflexion de $C_f$.

**3**/ Déterminer T la tangente la tangente à $C_f$ en A.

**4/a**- En utilisant le théorème des inégalités d'accroissements finis, prouver que pour tout x$\in [0,+\infty[$ on a : $f(x) - 1 \leqslant x$.

**b**- Déduire la position relative de $T$ et $C_f$.

**5**/ Tracer enfin T et $C_f$.

## EXERCICE 7

**1**/ Soit *f* la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

**a**- Etudier les variations de *f*.

**b**- En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ et que $\alpha \in ]1;2[$.

**c**- Prouver que l'équation $f(x) = 0$ est équivalante à $g(x)$=$x$ avec $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

**2**/ Soit la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n);\ \forall \in IN$

**a**- Montrer que $\forall \in IN;\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

**b**- Montrer que $\forall x \in [1,\ 2],\ |g'(x)| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}$

**c**- Prouver que $\forall \in IN;\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$

**d**- Montrer alors que $(u_n)$ converge vers $\alpha$

**3**/ Soit *h* la fonction définie sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ par :

$$h(0) = 1 \text{ et } h(x) = g\left[\left(\frac{1-tgx}{tgx}\right)^2\right];\forall x \in ]0;\frac{\pi}{2}[$$

**a**- Mq $\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}[; h(x) = \frac{1}{1-tgx}$.

**b**- Mq *h* réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{4}[$ vers un intervalle $J$ qu'on précisera.