L. B. Monastir	**Série n : 35**	$4^{ème}$ **Math**
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Dérivabilité + déplacement + antidépl+ suite + Compl. +…		

EXERCICE 1

Répondre par Vrai ou faux **en justifiant** votre réponse

1/ $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{5}}$ est une racine cinquième de $-4\sqrt{2}$.

2/ ABCD est un carré direct de centre I. Soient les isométries f=$S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$ et g=$S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$. On a f $\circ g^{-1}$ est une symétrie centrale de centre C.

3/ Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in IN;\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$.

La suite (u_n) est convergente.

EXERCICE 2

Répondre par vrai ou faux **en justifiant**.

1/ Si z=$e^{i\theta}$ avec $\theta \in IR$ alors $\frac{z^2+1}{z}$ est un réel dans $[-2;2]$

2/ Si deux isométries du plan f et g coinsident en trois points alignés A, B et C alors on a nécessairement f=g.

3/ Soit f une fonction continue et strictement décroissante sur $[0;1]$

et f$([0;1]) = [0;1]$. $\forall n \in IN^*$ on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^{-1}(1-\frac{1}{nk})$.

a- On a $\forall n \in IN^*;\ f^{-1}(1-\frac{1}{n^2}) \leqslant S_n \leqslant f^{-1}(1-\frac{1}{n})$.

b- (S_n) convege vers 1.

EXERCICE 3

Choisir la bonne réponse

1/ D_1, D_2 et D_3 sont trois droites strictement parallèles. l'application $f = S_{D_1} \circ S_{D_2} \circ S_{D_3}$ est une :

a) symétrie orthogonale **b**) symétrie glissante **c**) une translation

2/ Soient f un déplacement et g est un antidéplacement tels que f$(A) = B$ et g$(B) = A$ avec A≠B alors g∘f est :

a) symétrie orthogonale **b**) symétrie glissante **c**) une translation

EXERCICE 4 (Suites réelles)

1/ On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in IN;\ u_{n+1} = \frac{3n+1}{3n+4}\,u_n$$

a- Montrer que (u_n) est décroissante sur IN.

b- Prouver que $\forall n \in IN;\ u_n = \frac{1}{3n+1}$.

2/ On considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a- Prouver que (S_n) est croissante sur IN.

b- Justifier que $\forall\, n \in IN;\ S_{2n} - S_n \geq n\, u_{2n}$.

c- Déduire que (S_n) n'est pas majorée.

d- Déterminer alors la limite de (S_n).

EXERCICE 5 d'après un devoir (Suites réelles)

Soit la suite (u_n) définie sur IN* par : $u_2 = 2$ et $\forall n \in IN^*$ $u_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{u_n}$.

1/**a**- Calculer u_2 et u_3.

b- Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 2;\ n \prec u_n \prec n+1$.

c- Déduire que (u_n) est strictement croissante puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2/ On pose $v_n = u_n - n$ et $w_n = \frac{1}{v_n} - 1$ pour tout n$\in IN^*$.

a- Calculer w_1 et montrer que $\forall n \in IN^*;\ w_{n+1} = \dfrac{1}{w_n + \frac{1}{n}}$.

b- Montrer par récurrence que $\forall n \in IN^*;\ 1 - \frac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant 1$.

c- En déduire que les deux suites (w_n) et (v_n) sont convergentes et déterminer la limite de chacune.

3/ On pose $S_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k w_k;\ \forall n \in IN^*$

a- Montrer que $\forall n \in IN^*;\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$.

b- En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 6 (Nombres complexes)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère les points A et A' d'affixes respectives $(-a)$ et $(-\bar{a})$ où a est un nombre complexe non réel donné.

Soit f l'application de $P\backslash\{A'\}$ dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' nd'affixe $z' = \frac{z+a}{z+\bar{a}}$ et $(E)\ :\ z^2 + (\bar{a}-1)z - a = 0$ l'équation dans $\mathbb{C}$ d'inconnue z.

1/ Montrer que (M appartient au cercle trigonométrique) si et seulement si (M appartient à la médiatrice de $[AA']$)

2/ Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation (E).

3/ On suppose que : $a = 1 + ik,\ k \in IR^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

4/ On suppose dans cette question que : $a = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

a- Calculer a^2. En déduire le module et un argument de a.

b- Montrer que si (z_1 et z_2 sont solutions de (E)) alors ($|z_1||z_2| = 2$ et $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv -\frac{3\pi}{8}\quad [2\pi]$)

5/ On suppose dans cette question que $a{=}ie^{i\theta}$ où θ est un réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

a- Mettre sous la forme exponentielle a et $(1-\bar{a})$.

b- Mq : si (z_1 et z_2 sont solutions de (E)) alors ($\arg(z_1+z_2) \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\quad [2\pi]$)

6/ Montrer que : z' est réel si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Re}(a)$.

7/ Soit $n \in IN^*$. Montrer que : si $(z')^n = 1$ alors z est réel.

EXERCICE 7 (Nombres complexes)

Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout z $\in \mathbb{C}$, on pose $(E_\theta)\ :\ iz^2 + e^{2i\theta}z + i(e^{2i\theta}+1) = 0$

On note z' et z" les solutions de l'équation (E_θ).

1/ Sans calculer z' et z"

a- Montrer que $arg(z') + \arg(z'') \equiv \theta\quad [2\pi]$

b- Montrer que $\arg\left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}\right) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}\quad [2\pi]$

c- Déterminer la valeur de θ pour que z'+z"=-1.

2/**a**- Calculer $(e^{2i\theta}+2)^2$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

3/ Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit les points A et M d'affixes respectives $z_A = -i$ et $z_M = i(1+e^{2i\theta})$.

a- Ecrire z_M sous forme exponentielle

b- Déterminer la valeur de θ pour que le triangle OAM soit isocèle en O.

4/ Déterminer et construire l'ensemble des points M lorsque θ varie dans $[0; \frac{\pi}{2}[$.

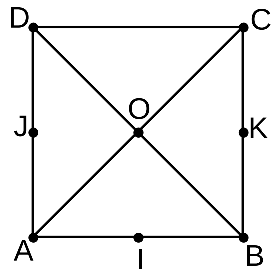
EXERCICE 8 (isométrie)

Dans la figure ci-contre on a :

. ABCD est un carré de centre O

. I=A$*B$; J=A$*D$ et $K = B * C$

Soit f une isométrie qui transforme A en D et D en C et dont l'ensemble des points fixes n'est pas vide.



1/**a**- Montrer que f admet un seul point fixe

b- Prouver alors que f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

2/ Soit h l'isométrie sans point fixe qui transforme A en D et I en J.

a- Déterminer h(B).

b- Montrer que h est une symétrie glissante dont on déterminera sont vecteur $\vec{u}$ et son axe Δ.

♦ Exercice 9 ♦ dev (déplacement - antidéplacement)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre I tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et le point E tel que DBE est équilatéral direct de centre G.

1/ Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que R$(B) = A$ et R$(A) = D$. Caractériser R.

2/ Soit g=$r_{\left(B,\ \frac{\pi}{6}\right)} \circ r_{\left(E,\ \frac{\pi}{3}\right)}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

3/ On pose $f = r_{\left(I,\ \frac{\pi}{2}\right)}$ et $h = f \circ g^{-1}$.

a- Déterminer h(C)

b- Caractériser h.

4/ Soit Δ une droite variable passant par A et distincte de (AC). On désigne par B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur Δ.

a- Déterminer $f(\Delta)$ et $f((DD'))$.

b- En déduire $f(D')$.

c- Montrer que le cercle de diamètre $[B'D']$ passe par un point fixe lorsque Δ varie.

Exercice 10 D'après: www.etteyeb-amor.com

ABCD est un carré de centre I et de sens direct, E le point tel que DCE est un triangle équilatéral de sens direct, $J = D * C$, $K = A * D$, $L = E * D$ et O le centre du cercle circonscrit au triangle DCE.

1/**a**- Déterminer $\varphi(C)$ et $\varphi(D)$ avec $\varphi = R_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{(IJ)}$.

b- Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

2/**a**- Caractériser $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)}$.

b- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(AB)}$.

3/ Pour tout point N du plan on considère les points $N_1 = R_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)}(N)$ et $N_2 = R_{\left(O,\frac{-2\pi}{3}\right)}(N)$. Montrer que le milieu du segment $[N_1N_2]$ est un point fixe à préciser.

4/ On considère la suite des points $(M_n)_{n\in IN}$ définie par M_0 est un point quelconque du plan et pour tout n de IN , $M_{n+1} = \varphi(M_n)$.

a- Montrer que pour tout n de IN on a $\overrightarrow{M_0M_{2n}} = (2n)\overrightarrow{JL}$.

b- En déduire que pour tout $n \in IN$, M_{2n+1} appartient à une droite fixe que l'on précisera.

EXERCICE 11

1/ Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

a- Etudier les variations de f.

b- En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]1;2[$.

c- Prouver que l'équation $f(x) = 0$ est équivalante à $g(x)=x$ avec $g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2/ Soit la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$; $\forall \in IN$

a- Montrer que $\forall \in IN;\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

b- Montrer que $\forall x \in [1, 2],\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$

c- Prouver que $\forall \in IN;\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$

d- Montrer alors que (u_n) converge vers α

3/ Soit h la fonction définie sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ par :

$$h(0) = 1 \text{ et } h(x) = g\left[\left(\frac{1-tgx}{tgx}\right)^2\right]; \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$$

a- Mq $\forall x \in [0; \frac{\pi}{4}[; h(x) = \dfrac{1}{1-tgx}$.

b- Mq h réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{4}[$ vers un intervalle J qu'on précisera.

c- Mq k (la bijection réciproque de h) est dérivable sur J puis calculer $k'(x)$.

EXERCICE 12

L graphique ci-joint est la représentation graphique C_f d'une fonction f définie sur]1;2] dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

La droite d'équation x=1 est une asymptote à C_f.

I/1/ Par lecture graphique répondre aux questions suivantes

a) Montrer que f n'est pas dérivable à gauche en 2 et donner $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)}{x-2}$.

b) Montrer que f réalise une bijection de]1,2] sur un intervalle J à déterminer.

c) Construire $C_{f^{-1}}$ (la courbe de f^{-1}) sur la même feuille à rendre.

d) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0 et déterminer $(f_d^{-1})'(0)$.

2/ On admet que $f(x)=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.

a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans]1,2]

Vérifier que $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

b) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a $f^{-1}(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

3/ On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f^{-1}(u_n);\ \forall n\in IN$

a) Montrer que pour tout $n\in IN$ on a $1\le u_n\le 2$.

b) Sachant que $\left|(f^{-1})'(x)\right|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour tout $x\in[1;2]$.

Montrer que pour tout $n\in IN;\ |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{\sqrt{2}}{2}|u_n-\alpha|$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

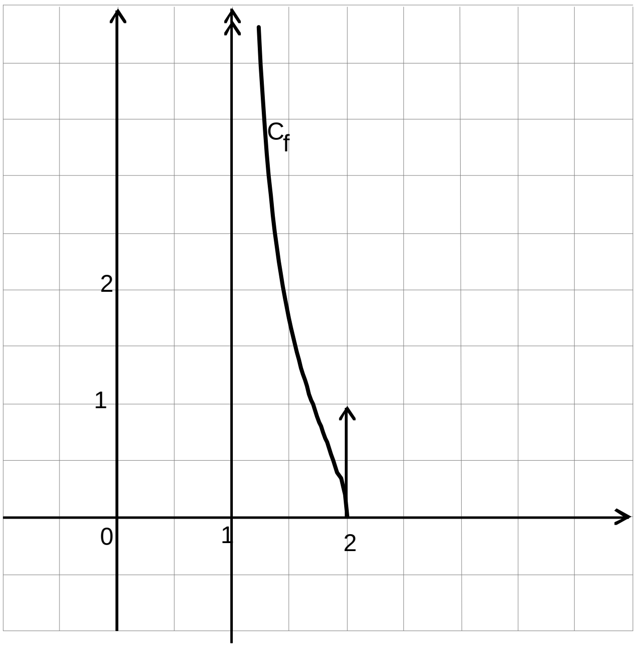
II/ Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ et si $x\in[0;\frac{\pi}{4}[;\ g(x)=\frac{1}{f^{-1}(\tan(2x))}$.

1/ Montrer que pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right];\ g(x)=\frac{1}{1+\cos 2x}$.

2/a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};1\right]$ et que $(g^{-1})'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$.



EXERCICE 13

Soit la fonction f définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$.

I) 1/a- Prouver que f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et que $f'_g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b- Donner une équation cartésienne de T la demi-tangente à guache à la courbe de f en son point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

2/ Justifier la dérivabilité de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

3/ Dresser le tableau de variation de f

4/ Tracer C_f la courbe de f.

II)1/a- Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une solution unique β dans I

b- Vérifier que $\beta > 0$.

2/a- Vérifier que $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[; f'(x) = -\frac{\sqrt{1+\sin x}}{2}$.

b- Déduire que $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[; |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

III) Soit la suite (u_n) définie sur IN par :$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n); \forall n \in IN$

1/ Mq $\forall n \in IN$,$u_n \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

2/ Mq $\forall n \in IN$,$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|u_n - \beta|$.

3/ Etudier donc la convergence de (u_n).

EXERCICE 14

On considère dans le plan orienté un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2\,BC$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soient $I = A * B;\ J = C * D$ et $B' = S_B(A)$.

1/a- Montrer que il existe un unique déplacement f du plan tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$.

b- Quel est l'angle de f ? Caractériser donc f.

c- Déterminer $f(B)$.

2/ Déterminer la droite (δ) telle que $f = S_{(IJ)} \circ S_{(\delta)}$.

3/ Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Préciser $r(B); r(C)$ et $R(J)$

b) Soit M un point de $[CJ]$. La perpendiculaire à (IM) issue de I coupe la perpendiculaire à (BM) issue de J en un point M'. Quel est l'ensemble des points M'quand M décrit $[CJ]$?

4/a- Montrer que $g = r \circ f$ est une rotation dont on précisera l'angle.

b- Déterminer $g(A)$.

c- Déduire la construction du centre de g.

5/a) Montrer que il existe un antidéplacement φ telle que :$\varphi(A) = C$ et $\varphi(I) = J$.

b) Montrer que φ est une symétrie glissante.

c) Montrer que $\varphi(B) = D$.

6/a) Déterminer $\varphi \circ S_{(AB)}(A)$ et $\varphi \circ S_{(AB)}(B)$. En déduire que $\varphi \circ S_{(AB)} = f$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de φ