L. B. Monastir	Série n : 35	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :
Chapitres : Dérivabilité + déplacement + Primitive + suite + ...		

Exercice 1 Vrai - Faux

Répondre par Vrai ou Faux

1/ Si un antidéplacement fixe un point A alors il est la rotation de centre A. ☐

2/ Si $f = t \circ S_\Delta$ avec t une translation et S_Δ est une symétrie orthogonale alors l'image par f d'un triangle direct est un triangle aussi direct. ☐

3/ Tout déplacement qui fixe deux point distincts est une translation. ☐

Exercice 3 : (5 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle $ABCD$ de centre O tel que $AB = 2BC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$. Soit $I = A * B$ et $J = C * D$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$.

b) Prouver que $f(B) = D$.

c) Montrer que f est une symétrie glissante.

2) Soit $E = f(C)$.

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

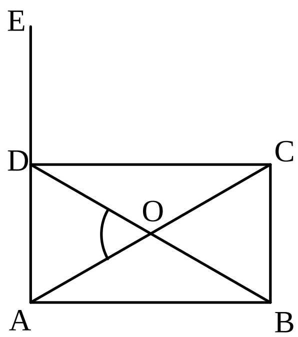
b) Prouver que $D = A * E$.

c) Soit $F = f(D)$. Montrer que $ABFE$ est un carré direct.

3) Montrer que $f o S_{(AB)}$ est une symétrie centrale dont on précisera le centre. En déduire la forme réduite de f.

4)Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles de diamètres respectifs $[AB]$ et $[CD]$. (AC) recoupe $\mathscr{C}$ en M et (CE) recoupe $\mathscr{C}'$ en M'. On pose $N = S_{(OI)}(M')$. Montrer que (MN) et (AD) sont parallèles.

Exercice 3



$ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $\widehat{(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OA})} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

1)a/ Prouver qu'il existe une seule rotation R qui transforme C en A et B en O.

b/ Désignons par Ω le centre de R.

i) Justifier que $\widehat{(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega C})} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

ii) Prouver donc que $\Omega \in [AB]$.

2) Soit l'application $f = S_{(OA)} \circ S_{(\Omega O)} \circ S_{(\Omega C)}$.

a/ Calculer $f(B)$ et $f(C)$.

b/ Prouver que f est une symétrie glissante dont on donnera le vecteur $\vec{u}$ et l'axe Δ.

3) Soit E le symétrique de A par rapport à D et A' le point vérifiant $\overrightarrow{A'E} = \overrightarrow{OD}$.

a/ Montrer que $AOA'D$ est un losange.

b/ Prouver donc que $f(A) = E$.

Exercice 4 *Extrait d'un Bac*

Soir $AFED$ un carré de coté $4\ cm$ tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).

A- **1**/**a**- Soit r la rotation définie par $r(F) = E$ et $r(E) = D$. Préciser l'angle et le centre de r.

b- Soit $f = r \circ S_{(OO_1)}$; *où* $S_{(OO_1)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OO_1).
Montrer que f est la symétrie orthogonale d'axe (OE).

2/ Soit $r' = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ et r^{-1} désigne la rotation réciproque de r.

a- Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle.

b- D'éterminer $r'(O)$. En déduire que F est le centre de r'.

3/ On désigne par g l'antidéplacement défini par $g(D) = F$ et $g(O) = O_1$.

a- Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

b- Soit M un point du plan.
Montrer que $\left[\ g(M) = r'(M)\right]$ si et seulement si $\left[\ f(M) = M\right]$

c- En déduire l'ensemble des points M tels que $g(M) = r'(M)$.

Exercice 5 DS1-4M(5-12-2008) LP Kairouan.

Dans le plan orienté on considère un carre ABCD de centre I et de sens direct .
on désigne par J et K les milieux respectifs des cotés [AD] et [CD] , soit E le point du plan tel que DBE soit un triangle équilatéral de sens direct

1/ On pose $\Psi = t_{\overrightarrow{BC}} o S_{(AC)}$

a- Déterminer $\Psi(A)$ et $\Psi(D)$.

b- En déduire que Ψ est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

2/**a**- Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoi B sur A et A sur D.

b- Caractériser R.

3/ Soit g=$R_{(B,\frac{\pi}{6})} o R_{(E,\frac{\pi}{3})}$, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

4/ Soit r=$R_{(I,\frac{\pi}{2})}$ et on pose $t = g \circ r^{-1}$

a- Déterminer t(A) puis caractériser t.

b- Pour tout M du plan , on pose $M_1 = r(M)$ et et $M_2 = g(M)$.
quelle est la nature de quadrilatère ABM_2M_1?

....

Exercice 1 **Vrai** - **Faux**

1/ Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I alors elle admet de primitive sur I.

2/ Si F est une primitive d'une fonction f sur IR alors la fonction $\left(x \mapsto 2\,F(5+2x)\right)$ est une primitive de $(x \mapsto f(5+2x))$ sur IR.

3/ Si f est une fonction continue et décroissante sur un intervalle I alors toute primitive de F est décroissante sur I.

4/ Si F est une primitive de f:x$\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1;1[$ alors la fonction g:$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to IR; x \mapsto F(\sin x)$ est une fonction constante

Exercice 2 QCM

Choisir la bonne réponse

1/ Une primitive de $(x \mapsto \sin^3 x)$ est

a) $F(x) = -\cos^3 x$

b) $F(x) = -\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$

c) $F(x) = \frac{1}{4}\cos^4 x$.

2/ On donne le tableau de variation de g et on désigne par F une primitive de g .

a) F est strictement dédroissante sur]0; 1]

b) F est strictement croissant sur $[1;+\infty[$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.

3/ Soit F une primitive de f: $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. une primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{1-x}\right)$ est :

a) $x \mapsto F(-x)$ **b**) $x \mapsto -F(x)$ **c**) $x \mapsto -F(-x)$

Exercice 3

Soit $f : IR \to IR; x \mapsto \dfrac{x}{1+\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$

1/ Prouver que f admet une seule primitive sur IR qui s'annule en 0. On notera F cette primitive.

2/**a**- Calculer $(F(x)-F(-x))'$; $\forall x \in IR$

b- En déduire que F est paire

3/**a**- Montrer que $\forall t \in IR^+;\ \frac{t}{2} \leqslant f(t)$

b- Déduire que $\forall x \geqslant 0;\ \frac{1}{4}x^2 - F(x) \leqslant 0$

c- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

4/**a**- Dresser le tableau de variation de F sur $[0,+\infty[$

b- Tracer l'allure de la courbe de F dans un repère orthonormé

Exercice 4 ♦

Soit F une primitive sur $[-1;1]$ d'une fonction f dérivable sur $[-1;1]$ et telle que f(0)=0 et $f'(x) < 0;\ \forall x \in [-1;1]$

1- Donner le tableau de sens de variation de F.

2- Sachant que $F(0) = -3$; donner le tableau de signe de variation de F.

3- Donner le tableau de sens de variation de g:x $\mapsto g(x)=F\left(\frac{1}{x^2+2}\right);\ \forall x \in IR$.

Exercice 5

1/ Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ admet une seule primtive sur $[-2;\ 2]$ qui s'annule en 0. On appelera F cette primitive.

2/**a**- Pour tout x$\in [-2;\ 2]$ calculer $[F(x)+F(-x)]'$

b- Déduire que F est une fonction impaire.

3/ Soit la fonction g : x $\mapsto g(x) = F(2\cos x);\ \forall x \in [0;\pi]$

a- Calculer $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b- Montrer que $g'(x) = 2(\cos 2x - 1);\ \forall x \in [0;\pi]$

c- En déduire l'expression de $g(x)$ pour tout x de $[0;\pi]$.

4/**a**- Calculer F(2)

b- Dresser le tableau de variation de F.

Exercice 6

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^4 + -3x^3 + 3x^2 + 1}{(x-1)^3};\ \forall x \neq 1$

1/ Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = x + \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x-1)^3};\ \forall x \neq 1$

2/ Déduire la primitive F de f sur]1;+∞[qui s'annule en 2.

Exercice 7

Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x};\quad f_2(x) = x^2 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}},\quad f_3(x) = \dfrac{x^2 - 2004}{x^2}$

$f_4(x) = \cos^5 x \sin x;\quad f_5(x) = \cos^2 x;\quad f_6(x) = \sin^2 x$

Exercice 8

Soit G la primitive sur [0;+∞[de $g : x \mapsto \dfrac{-1}{2(1+x^2)}$ et prenant $\dfrac{\pi}{4}$ en 0.

1/**a**- Préciser le sens de variation de G.

b- Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} (G(x) - x)$.

2/ Montrer que l'équation $G(x) = x$ admet une seule solution α dans IR⁺.

3/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 \in \mathrm{IR}^+$ et $u_{n+1} = G(u_n);\ \forall n \in IN$

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

b- Déduire que $\forall n \in IN;\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

c- Les suite (u_n) est elle convergente ?

Exercice 9

Soit F la fonction définie sur [0;+∞[vérifiant :

$(1)\ : F([0;+\infty[) = \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[$

$(2)\ :$ F est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2};\ \forall x \in [0;+\infty[$.

1/ Prouver que F$(0) = -\dfrac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

2/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par :$u_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} F(k)$;$\forall n \in IN$.

a- Montrer que $\forall n \in IN; F(n) \leq u_n \leq F(2n)$.

b- En déduire que (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.

3/ **S**oit G définie sur IR^+ par : $\begin{cases} G(x) = \dfrac{1}{2}F\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right) & si\ x > 0 \\ G(0) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

a- Montrer que $G'(x) = \dfrac{-1}{2(x^2+1)};\forall x > 0$.

b- Soit $x \in IR_+^*$. Al'aide du théorème d'accroissements finis, montrer

qu'il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que $\dfrac{G(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 0} = \dfrac{-1}{2(c^2+1)}$.

c- En déduire que G est dérivable à droite en 0.

Exercice 10

Soit la fonction $f :] -\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[\to IR; x \mapsto \cos x[1 + tg^2(\sin x)]$.

1/ Montrer que f admet des primitives sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2/ Montrer qu'il existe deux fonctions u et v définient sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tels que :

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ on a $f(x) = u'(x).v'[u(x)]$.

3/ Déduire alors la primitive F de f sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0.

4/ Montrer que F réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans un intervalle J à préciser.

5/ Déterminer le domaine de dérivabilité de F^{-1}.

6/ Calculer $F^{-1}\left[tg\frac{1}{2}\right]$.

Exercice 11

1/ Montrer que la fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ admet une seule primitive F sur $]0;+\infty[$ telle que $F(1) = 0$.

On admet que $F(2) = 0,69$.

2/**a**- Calculer $(F(x-1))'$ pour tout $x \geqslant 2$.

b- Soit G une primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{x-1}\right)$ sur $[2;+\infty[$.

Calculer $A = G(3) - G(2)$

3/ Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x-1}$; pour tout $x \neq 1$

a- Prouver que g admet au moins une primitive H sur $[2;+\infty[$.

b- Déterminer les réels a, b et c tels que $g(x) = ax^2 + bx + \frac{c}{x-1}$; $\forall x \geq 2$.

c- Déduire la valeur de $B = H(3) - H(2)$.

Exercice 12

Les questions de cet exercice sont indépendantes

1/ Soit $f(x) = \frac{-x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 5x + 12}{(x^2+2)^2}$

a- Déterminer les réels a, b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{(x^2+2)^2}; \forall x \in IR$$

b- Déduire une primitive F de f sur IR.

....

2/ Soit g : $x \mapsto (x^2 + 5x + 5)\sqrt{x+2}$; $\forall x \geqslant -2$

a- Déterminer les réels a', b' et c' tels que : $\forall x \geqslant -2$

$g(x) = \left[a'(x+2)^2 + b'(x+2) + c'\right]\sqrt{x+2}$

b- Déduire G une primitive sur $[-2;+\infty[$ de g

....

3/ Soit h : $x \mapsto 3\cos x - 5\cos^3 x$

Soit H : $x \mapsto \alpha \sin x + \beta \sin^3 x$ avec $(\alpha, \beta) \in IR^2$

Déterminer les valeurs de α et β pour que H soit une primitive de h sur IR.