L. B. Monastir	Série n : 37	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Bijection + ...		

Exercice 1

Soit $f : \left[0; \frac{1}{2}\right[\to IR; x \mapsto \frac{1}{\cos(\pi x)}$.

1- Dresser le tableau de variation de *f*.

2- Mq *f* réalise une bijection de $\left[0; \frac{1}{2}\right[$ dans un intervalle J à préciser.

3/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.

4/ Prouver que f^{-1} est dérivable sur J\{1}.

5/ Démontrer que $\forall x \in J\backslash\{1\}; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi x\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto f(x) = tg\left[\frac{\pi}{4}(x-1)\right]; \forall x \in [1;\ 2]$

1/ Dresser le tableau de variation de *f*.

2/**a**- Montrer que *f* réelise une bijection de $[1;\ 2]$ sur $[0;\ 1]$.

b- Etudier la dérivabilité de f^{-1} puis expliciter $(f^{-1})'(x)$.

3/**a**- Montrer que $\forall n \in IN^*;$ l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une seule solution u_n dans $[1;\ 2]$. On définie ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

b- Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroisante.

c- Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente puis calculer sa limite.

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2-2x+4}$. (C_f) est la courbe de *f* dans un R.O.N .$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

I/ 1/ Prouver que *f* est définie sur IR.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)]$. Interpréter géométriquement le résultat .

3/ Soit $h :]-\infty;1] \to IR; x \mapsto h(x) = f(x)$.

a-Mq h possède une bijection réciproque définie sur un intervalle J à préciser.

b-Donner une équation cartésienne de T la tangente à la courbe de h^{-1} au point d'abscisse 2.

c-Montrer que h^{-1} est uniquement dérivable sur $J\backslash\{\sqrt{3}\}$.

II/ Soit $g : [0;2] \to IR; x \mapsto h^{-1}\left(3+\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)+5x$.

Sans chercher $h^{-1}(x)$ reponder au 3 questions suivantes:

1/ Montrer que g est dérivable sur $[0;2]$.

2/ Prouver que g est strictement croissante sur $[0;2]$

3/ Montrer que l'equation $g(x) = 0$ possède une seule solution α dans $[0;2]$

4/ Calculer maintenant $h^{-1}(x); \forall x \in J\backslash\{\sqrt{3}\}$.

Exercice 4

Soit la fonction *f* définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}$.

1/ Mq *f* est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $f'(x); \forall x \in [0,1]$.

2/ Mq f réalise une bijection de $[0,1]$ sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$.

3/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$.

4/ $\forall x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$; trouver $\sin\left[\frac{\pi}{2}f^{-1}(x)\right]$; $\cos\left[\frac{\pi}{2}f^{-1}(x)\right]$ puis calculer $(f^{-1})'(x)$

5/ Soit $I = IN\backslash\{0,1,2,3\}$. Soit la suite $(S_n)_{n\in I}$ définie par : $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=4}^{n} f^{-1}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

a- Mq $\forall k \in \{4,5,6,\ldots,n\}$ on a : $f^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq f^{-1}\left(1-\frac{1}{k}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

b- Déduire un encadrement de S_n pour tout $n \in I$.

c- Préciser donc la limite de (S_n).

Exercice 5 *d'après un devoir*

A) Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

2/ Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

3/a- En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

B) Soit F la fonction définie sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = 1 - \sin x$.

1/a- Dresser le tableau de variation de F.

b- Montrer que F réalise une bijection de $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$.

2/ Montrer que l'équation $F(x) = x$ admet dans $]0,\ \frac{\pi}{2}[$ une unique solution α.

3/a- *Montrer* que F^{-1} est dérivable en α et calculer $(F^{-1})'(\alpha)$.

b- Montrer que pour tout $x \in]0,1]$ on a $(F^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.

4/ Soit $H(x) = x + F^{-1}(1-\cos x)$; $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

a- *Pour* tout x $\in]0, \frac{\pi}{2}]$ calculer $H'(x)$ puis $H\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b- En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$F^{-1}(1-\sin x) + F^{-1}(1-\cos x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 6 *D'après un devoir*

A) On considère la fonction G définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \frac{1}{1+\sin x}$.

1/ Mntrer que G réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur I qu'on déterminera.

2/ Etudier la dérivabilité de G^{-1} puis calculer l'expression de sa fonction dérivée.

B) On considère a présent la fonction f définie sur IR par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1/ Dresser le tableau de variation de f puis déduire que :

a- si $x > 0$ alors $f(x) > 1$ et si $x < 0$ alors $f(x) < 1$.

b- f est une bijection de IR sur $]0;2[$.

2/ Montrer que $\forall x \in]0;2[; f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.

3/ Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

4/ Soit h étant la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Prouver que $G(x) = \dfrac{1}{f \circ h(x)}$.

5/ Montrer $\forall x \in IR$ on a :$0 < \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \leq 1$.

6/**a**- Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une solution réelle unique α.

b- Prouver que $\alpha > 1$.

C) Soit a un réel de $[1;+\infty[$. On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n); \forall n \in IN$.

1/ Montrer que $\forall n \in IN; u_n > 1$.

2/ Montrer $\forall n \in IN; |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.

3/ Déduire alors que (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 7 Extrait d'un devoir

Soit la fonction définie sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan^2(x)$

1/ Montrer que f réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ sur $[0;+\infty[$

2/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $\forall x \in]0;+\infty[$ on a : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$.

3/ Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on pose $g(x) = f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

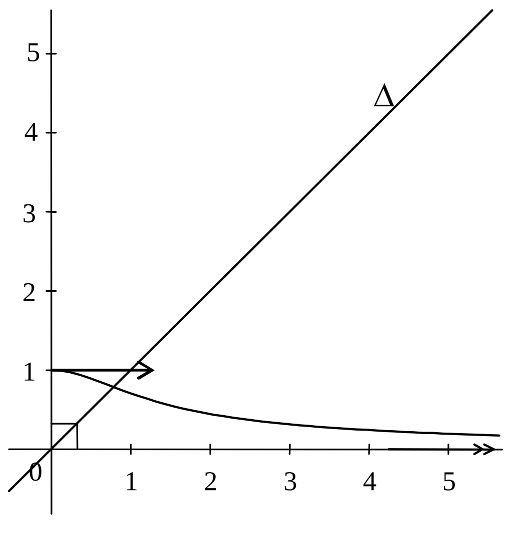
a) Montrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $g'(x)$

b) En déduire que pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a :

$$f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 Extrait d'un devoir

Dans le graphique ci-contre la courbe C est celle d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$, Δ est la droite d'équation $y = x$.



1/**a**) Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Reproduire sur votre copie la courbe C et tracer sur le même graphique la courbe C' de f^{-1}.

d) Par lecture graphique déterminer

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f^{-1}(x)}{x-1}.$$

2/ La courbe C coupe Δ en un point M_0 d'abscisse $x_0 \in \left]\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right[$.

a) Montrer qu'il existe un réel $c \in]0, x_0[$ tel que $f(x_0) = x_0 f'(c) + 1$.

b) On donne $f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ et $f(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. donner un encadrement de $f'(c)$.

3/ Sachant bque pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

EXERCICE 9 Extrait d'un devoir

L graphique ci-joint est la représentation graphique C_f d'une fonction f définie sur]1;2] dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

La droite d'équation x=1 est une asymptote à C_f.

I/1/ Par lecture graphique répondre aux questions suivantes

a) Montrer que f n'est pas dérivable à gauche en 2 et donner $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)}{x-2}$.

b) Montrer que f réalise une bijection de]1,2] sur un intervalle J à déterminer.

c) Construire $C_{f^{-1}}$ (la courbe de f^{-1}) sur la même feuille à rendre.

d) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0 et déterminer $(f_d^{-1})'(0)$.

2/ On admet que $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.

a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans]1,2]
Vérifier que $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a $f^{-1}(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

3/ On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n);\ \forall n \in IN$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a $1 \le u_n \le 2$.

b) Sachant que $\left|(f^{-1})'(x)\right| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour tout $x \in [1;2]$.
Montrer que pour tout $n \in IN;\ |u_{n+1}-\alpha| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n-\alpha|$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

II/ Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par

$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ et si $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right[;\ g(x) = \dfrac{1}{f^{-1}(\tan(2x))}$.

1/ Montrer que pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right];\ g(x) = \dfrac{1}{1+\cos 2x}$.

2/a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{2};1\right]$ et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$.