L. B. Monastir	Série n : 38	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Primitive + ...		

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = \cos(7x) \times \cos(3x)$

1/ Justifier que f possède des primitives sur IR.

2/ Donner une la primitive F de f sur IR qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$. (On pourra profiter du théorème d'Euler)

Exercice 2

Soit f$(x) = \sin^3 x,\ \forall x \in IR$

1/ Donner la primitive F de f qui s'annule en 0.

2/**a**- A l'aide d'Euler linéariser f(x)= $\sin^3 x$

b- En déduire une autre expression de F(x) pour tout x de IR.

Exercice 3

Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$; $f_2(x) = x^2 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[5]{x}}$, $f_3(x) = \frac{2x^4 - 7x - 5}{x^3}$

$f_4(x) = \cos^5 x \sin x$; $f_5(x) = \cos^4 x$; $f_6(x) = \sin^2 x$

Exercice 4 de mon livre 4 Math- tome 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes

1/ Soit $f(x) = \frac{-x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 5x + 12}{(x^2+2)^2}$

a- Déterminer les réels a, b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{(x^2+2)^2}; \forall x \in IR$$

b- Déduire une primitive F de f sur IR.

....

2/ Soit g : x $\mapsto (x^2 + 5x + 5)\sqrt{x+2}$; $\forall x \geqslant -2$

a- Déterminer les réels a', b' et c' tels que : $\forall x \geqslant -2$

$g(x) = \left[a'(x+2)^2 + b'(x+2) + c'\right]\sqrt{x+2}$

b- Déduire G une primitive sur [-2;+∞[de g

....

3/ Soit h : x $\mapsto 3\cos x - 5\cos^3 x$

Soit H : x $\mapsto \alpha \sin x + \beta \sin^3 x$ avec $(\alpha, \beta) \in IR^2$

Déterminer les valeurs de α et β pour que H soit une primitive de h sur IR.

Exercice 5

Soit F la fonction définie sur [0;+∞[vérifiant :

(1) : $F([0;+\infty[) = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$

(2) : F est une primitive de f : $x \mapsto \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2}$; $\forall x \in [0;+\infty[$.

1/ Prouver que F$(0) = -\frac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

2/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par :$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} F(k)$;$\forall n \in IN$.

a- Montrer que $\forall n \in IN; F(n) \leq u_n \leq F(2n)$.

b- En déduire que (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.

3/ **S**oit G définie sur IR^+ par : $\begin{cases} G(x)=\frac{1}{2}F\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) & si\ x>0 \\ G(0)=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

a- Montrer que $G'(x)=\frac{-1}{2(x^2+1)}; \forall x>0$.

b- Soit $x \in IR_+^*$. Al'aide du théorème d'accroissements finis,montrer qu'il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que $\frac{G(x)-\frac{\pi}{4}}{x-0} = \frac{-1}{2(c^2+1)}$.

c- En déduire que G est dérivable à droite en 0.

Exercice 6

Soit $f : IR \to IR; x \mapsto \frac{x}{1+\frac{x^2+1}{x^2+2}}$

1/ Prouver que f admet une seule primitive sur IR qui s'annule en 0. On notera F cette primitive.

2/**a**- Calculer $(F(x)-F(-x))'$; $\forall x \in IR$

b- En déduire que F est paire

3/**a**- Montrer que $\forall t \in IR^+; \frac{t}{2} \leqslant f(t)$

b- Déduire que $\forall x \geqslant 0; \frac{1}{4}x^2 - F(x) \leqslant 0$

c- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

4/**a**- Dresser le tableau de variation de F sur $[0,+\infty[$

b- Tracer l'allure de la courbe de F dans un repère orthonormé.

Exercice 7

1/ Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ admet une seule primitive sur $\left[-2;\ 2\right]$ qui s'annule en 0. On appelera cette primitiv F.

2/**a**- Pour tout x$\in \left[-2;\ 2\right]$ calculer $[F(x)+F(-x)]'$

b- Déduire que F est une fonction impaire.

3/ Soit la fonction g : x $\mapsto g(x) = F(2\cos x);\ \forall x \in [0;\pi]$

a- Calculer $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b- Montrer que $g'(x) = 2(\cos 2x - 1);\ \forall x \in [0;\pi]$

c- En déduire l'expression de $g(x)$ pour tout x de $[0;\pi]$.

4/**a**- Calculer F(2)

b- Dresser le tableau de variation de F.

Exercice 8

Soit G la primitive sur $[0;+\infty[$ de $g : x \mapsto \frac{-1}{2(1+x^2)}$ et prenant $\frac{\pi}{4}$ en 0.

1/**a**- Préciser le sens de variation de G.

b- Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} (G(x)-x)$.

2/ Montrer que l'équation $G(x) = x$ admet une seule solution α dans IR^+.

3/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 \in IR^+$ et $u_{n+1} = G(u_n);\ \forall n \in IN$

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

b- Déduire que $\forall n \in IN;\ |u_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

c- La suite (u_n) est elle convergente ?