L. B. Monastir	Série N : 46	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaier		Séance n : …..
Chapitres : Les similitudes		

♦ *Exercice 1* ♦ *Bac Tn 2008*

On considère dans le plan orienté un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par J le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Soit f la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B.

1/a- Montrer que f est de rapport $\sqrt{3}$.

b- Préciser l'axe de f.

2/ Soit $B' = f(B)$.

a- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ f$.

b- En déduire que $\overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{CA}$.

c- Montrer que $BB' = BC$.

d- En déduire que $f(I) = J$.

3/ Soit $S = f \circ S_{(BC)}$ où $S_{(BC)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (BC).
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

♦ *Exercice 2* ♦

Dans le plan orienté, on considère le trapèze isocèle $ABCD$ tel que $AB = 2\,AD$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On note I, J et O les milieux respectifs des cotés $[BC]$, $[AD]$ et $[AB]$.

1/a) Vérifier que $AOCD$ est un losange (on notera K le centre du losange $AOCD$).

b) Montrer qu'il existe un seul déplacement f qui envoie B sur D et C sur A.
Caractériser f.

2/ Soit g l'antidéplacement qui envoie B sur D et C sur A.

a- Montrer que g est une symétrie glissante.

b- Montrer que la droite $(IJ)est$ l'axe de g.

c- En déduire la forme réduite de g.

3/ Soit S la similitude directe qui envoie B sur D et A sur K.

a- Montrer que $S = h \circ f$ où h est l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{4}$.

b- Déduire l'angle et le rapport de S.

4/ Dans la suite le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ tel que B ait pour affixe 2.

a- Montrer que D a pour affixe $2e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

b- Déterminer la transformetion complexe associé à S.

c- En déduire l'affixe du centre Ω de S.

♦ *Exercice 3* ♦ *d'après un devoir*

Soit ABC un triangle direct, rectangle en B et tel que BA=4 et BC=3.
H désigne le projeté orthogonal de B sur (AC).
Soit f la similitude directe de centre H et qui transforme A en B.

1/ Déterminer l'angle et le rapport de f.

2/ Déterminer l'image par f de chacune des droites (AB) et (BH).
En déduire f(B)

3/ Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C.

a- Montrer que g admet un seul point invariant qu'on notera O.

b- Déterminer $g \circ g(A)$. En déduire que O est un point de la droite (AC).

4/ Soit f^{-1} la similitude réciproque de f.

a- Caractériser l'application $g \circ f^{-1}$.

b- En déduire que $g(H)$ *est* le point K symétrique de H par rapport à (BC).

c- Montrer que O est un point de la droite (BK).

d- Déterminer l'axe Δ de g.

♦ *Exercice 4* ♦

Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

On désigne par H et K les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.

1/ Caractériser le déplacement f qui transforme K en H et C en A.

2/ Soit $g = f \circ S_{(AC)}$.

a- Montrer que g est l'unique antidéplacement qui transforme K en H et C en A.

b- Déterminer $g(A)$ et en déduire la forme réduite de g.

3/ Soit O le symétrique de A par rapport à A et S la similitude directe qui envoie A en C et O en A.

a- Déterminer le rapport de S.

b- Vérifier que I, centre de S, est le projeté orthogonal de A sur (OC).

4/ Soit σ la similitude indirecte qui envoie O sur C et C sur H.

a- Déterminer le rapport de σ.

b- Montrer que $\sigma(A) = A$.

c- En déduire la forme réduite de σ.

♦ *Exercice 5* ♦ *O. K. n:78*

Dans le plan orienté on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$. On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

1/ Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D. Caractériser f.

2/ Soit g l'antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D.

a- Déterminer $(g \circ f)(C)$ et $(g \circ f)(D)$

b- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g \circ f$.

c- Donner alors la forme réduite de g.

3/ Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et D sur I.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Construire le centre Ω de S.

c- Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par S.
En déduire que le triangle $O\Omega C$ est rectangle.

d- Déterminer l'image du carré $ABCD$ par S.

e- Montrer que les points A, Ω et J sont alignés.

♦ *Exercice 6* ♦ *d'après un devoir*

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB isocèle rectangle en O et de sens direct et on désigne par I le milieu du segment $[AB]$. On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon OA, par C le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ *avec* la demi droite [OI) et par J le projeté orthogonal de A sur (BC).

1/ Soit f la similitude directe de centre A et qui transforme I en O.

a- Déterminer le rapport et l'angle de f.

b- Montrer que le triangle AJC est isocèle rectangle en J.

c- En déduire que f$(J) = C$.

2/**a**- Construire $I' = f^{-1}(I)$

b- Montrer que les points I, J et I' sont alignés.

3/ Soit g la similitude indirecte qui transforme A en J et J en K où K=A$*C$.

a- Déterminer le rapport de g.

b- Soit Ω le centre de g. Caractériser g∘g.

c- Déterminer g∘g(A) et en déduire que $\Omega = C$.

d- Déterminer l'axe de g.

4/ On pose $S = g \circ f$.

a- Déterminer S(A) et S(J).

b- Montrer que S est une symétrie glissante.

c- Déterminer le vecteur de S et construire son axe Δ.