L. B. Monastir	**Série n : 40**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Intégrale + ...		

Exercice 1

♦

Soit la suite (I_n) définie sur IN par: $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt; n \in IN$

1/ Calculer I_0 et I_1.

2/ Montrer que $I_2 = \frac{\pi}{4}$.

3/a- A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t) \times (-\sin t) \cos^n t \, dt$ en fonction de I_{n+2} et n.

b- Vérifier que $\cos^{n+2} t = \cos^n t - \sin^2 t \cos^n t$.

c- Déduire enfin que $\forall n \in IN; I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

4/ Calculer enfin I_6 .

Exercice 2

On pose $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1/ Déterminer le domaine de définition de F.

2/ Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur IR.

3/ On pose $g(x) = F(tgx)$ avec $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

a- Calculer $g(0)$.

b- Montrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$.

c- En déduire que $g(x) = x$

4/ A l'aide de ce qui précède calculer I=$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et J= $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ $f(x) = \frac{1}{2}(1+tgx)$

Soit la fonction $F : x \mapsto F(x) = \int_0^{f(x)} \frac{dt}{2t^2-2t+1}; \ \forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

1/ Déterminer le signe $(2t^2-2t+1)$ pour tout x de IR

2/a- Pq F est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et expliciter $F'(x)$

b- Déduire enfin l'expression de $F(x)$ pour x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

3/ A l'aide de ce qui précède calculer $I = \int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1}$.

Exercice 4

♦

Soit $f : [1;+\infty[\rightarrow IR; x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{x^3}$

1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/ Soit la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

a- Mq $\forall t \in [n, n+1]; f(n+1) \le f(t) \le f(n)$.

b- En déduire que $\forall n \in IN^*; f(n+1) \le u_n \le f(n)$.

c- $(u_n)_{n\in IN}$ est-elle convergente?

3/ Soit la fonction $F : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$; $\forall x \in [1;+\infty[$

a- Donner le sens de variation de F sur $[1;+\infty[$.

b- Mq $\forall t \ge 1; \sqrt{1+t} \le 1+t$.

c- En déduire que $\forall x \ge 1; F(x) \le \frac{3}{2}$

4/ Soit la suite (S_n) définie sur IN* par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

a- Etudier la monotonie de (S_n).

b- Montrer que $\forall n \in IN^*; S_n \leq \frac{5}{2}$.

c- $(S_n)_{n\in IN}$ est-elle convergente?

Exercice 5

Soit f:[1, $+\infty[\to IR; x \mapsto f(x) = x\sqrt{x-1}$

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 1, interpréter géométriquement le résultat trouvé.

2/a- Montrer que $\forall x \succ 1;\ f'(x) = \dfrac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$.

b- Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique 2 cm). On placera aussi le point d'abscisse 2 de C_f.

3/ Prouver que f réalise une bijection et tracer sa courbe $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1} la fonction réciproque de f dans le même repère)

4/ Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équation respectives $y = 2$, x= 0 et x=2.

a- Vérifier que $\forall x \geqslant 1;\ f(x) = (x-1)\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}$.

b- Calculer A.

Exercice 6

Soient I $= \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$; J $= \int_0^1 \dfrac{x^4}{\sqrt{1+x^4}}dx$ et K$= \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$

1/**a**- Montrer que I=J+K.

b- A l'aide d'un intégration par parties exprimer I en fonction de J.

c- Exprimer enfin I et J en fonction de K.

2/**a**- Préciser le sens de variation de f : x $\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}};\ \forall x \in \left[0,\ 1\right]$.

b- Montrer que $\forall k \in \left\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\right\};\ \frac{1}{5}f(\frac{k+1}{5}) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)dx \leqslant \frac{1}{5}f(\frac{k}{5})$

c- Déduire que :

$\frac{1}{5}(f(0)+f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})) \leqslant K \leqslant \frac{1}{5}\left(f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5}) + f(1)\right)$

(A l'aie d'une calculatrice scientifique on trouve $0,895 \leqslant K \leqslant 0,953$)

3/ Trouver des valeurs approchées de I et J à 10^{-1} près de I et J.

Exercice 7

Soit f :]0,1] → IR, x $\mapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

1/ Prouver que f n'est pas dérivable à gauche en 1.

2/ Dresser le tableau de variation de f puis tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthonrmé R.

3/**a**- Montrer que f réalise une bijection de]0,1] sur IR^+.

b- Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur IR^+.

c- Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère R.

c- Montrer que $\forall x \in IR^+;\ f^{-1}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4/ Soit la fonction F: x $\mapsto \int_0^{\tan(x)} \dfrac{1}{1+t^2}dt;\ \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$

a- Calculer $F'(x);\ \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$. Déduire F$(x)$; $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$.

c- Calculer l'aire de la partie du plan limitée par : $C_{f^{-1}}$, l'axe des abscissses et les droites d'équation respectives x=0 et x=1.

♦ *Exercice 8* ♦ *Bac Tn 2008*

On considère dans le plan orienté un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par J le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Soit f la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B.

1/**a**- Montrer que f est de rapport $\sqrt{3}$.

b- Préciser l'axe de f.

2/ Soit $B' =$f(B).

a- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ f$.

b- En déduire que $\overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{CA}$.

c- Montrer que $BB' = BC$.

d- En déduire que $f(I) = J$.

3/ Soit $S = f \circ S_{(BC)}$ où $S_{(BC)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (BC).

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

♦ *Exercice 9* ♦ *O. K. n:78*

Dans le plan orienté on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$. On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

1/ Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D.

Caractériser f.

2/ Soit g l'antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D.

a- Déterminer $(g \circ f)(C)$ et $(g \circ f)(D)$

b- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g \circ f$.

c- Donner alors la forme réduite de g.

3/ Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et D sur I.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Construire le centre Ω de S.

c- Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par S.

En déduire que le triangle $O\Omega C$ est rectangle.

d- Déterminer l'image du carré $ABCD$ par S.

e- Montrer que les points A, Ω et J sont alignés.