L. B. Monastir	Série n : 41	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Similitude + ...		

▸ Exercice 1 ◂ bac Tn 2009

On donne un triangle ABC tel que

$\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $BC = 2\,BA$

Soit H le projeté orthogonal de de B sur (AC) et $I = S_{(AB)}(H)$.

1/ Soit f la similitude directe de centre H, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a- Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.
b- Montrer que $f((AI)) = (BI)$.
c- Déterminer et construire la droite Δ image de (BI) par f.
d- Construire alors le point K image de I par f et montrer que $B = I * K$.

2/ Soit g la similitude indirecte qui envoie A sur B et B sur C. On note Ω le centre de g et D son axe.

a- Montrer que $g = f \circ S_{(AB)}$.
b- Montrer que $g \circ g$ est une homothétie de centre Ω.
c- Déterminer $g \circ g(A)$ et montrer que $g \circ g(I) = K$.
d- Conclure que Ω est le point d'intersection des droites (AC) et (IK).
Construire D.

Exercice 2 d'après un devoir

On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit M un point de la droite (DC). La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en M'. Posons $J = A * B$.

1/ Soit R la rotation de centre A et $R(D) = B$.

a) Montrer que $R((DC)) = (BC)$
b) Montrer alors que $R(M) = M'$.

2/ Soit s la similitude directe de centre A qui à tout point $M \neq A$ d'image M' par R associe le point G centre de gravité du triangle AMM'.

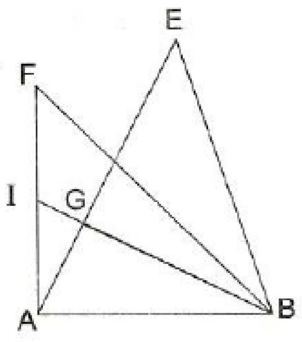
a) Déterminer l'angle et montrer que le rapport de S est $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
b) Déterminer la similitude directe h tel que $h(J) = B$ et $h(O) = C$.
c) Caractériser donc la transformation $\varphi = h \circ s$.

3/ Désignons par D' le symétrique de D par rapport à A. Soit $K{=}A * D'$
Soit σ la similitude indirecte tel que $\sigma(B){=}J$ et $\sigma(D){=}K$. Posons $A'{=}\sigma(A)$.

a- Montrer que $\widehat{\left(\overrightarrow{A'J};\overrightarrow{A'K}\right)} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
b- Montrer que $A'J = A'K$
c- Déduire que A est le centre de σ.

Exercice 3 bac 2011 p

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$, I est le milieu de $[AF]$. Les droites (IB) et (AE) se coupent en G et EGB est un triangle rectangle isocèle en G .



1/ Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f.

2/ Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.

a- Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

b- Déterminer la nature de g∘g et préciser son rapport et son angle.

c- Montrer que tan$\left(\widehat{ABI}\right) = \frac{1}{2}$. En déduire que GB=2GA.

d- En déduire que G est le centre de g.

3/ Soit r =g∘f.

a- Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

b- Déterminer r(E). En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de $[EB]$.

Exercice 5 *De mon livre 45 problèmes*

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O. Désignons par I=A∗B et J=A∗D.

Partie 1

1/ Mq il existe un seul antidéplacement f qui transforme D en A et J en I.

2/**a**) Caractériser f.

b) Montrer que f(A) =B.

3/ Soit g=$S_{(\mathrm{AI})}$ ∘f. Montrer que g est un déplacement que l'on précisera.

Partie 2

Soit S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.

1/ Donner le rapport et l'angle de S.

2/**a**) Préciser S((BC)) et S((BD)); en déduire S(B).

b) Montrer que S(A)=J.

3/ Soit Ω le centre S. Montrer que Ω,I,B et C sont situés sur un même cercle $(\mathbf{C})$.

4/**a**) Montrer que $S \circ S$ est une homothétie que l'on précisera.

b) En déduire que Ω est le barycentre des points (B,1) et (J,4)

c) Construire enfin Ω.

Partie 3

Soit σ la similitude indirecte telle que σ(D) =O et σ(C) =I.

1/ Déterminer le rapport de σ.

2/**a**) Déterminer σ((BC)).

b) Montrer que σ((BD)) =(BD).

c) En Déduire le centre de σ.

3/ Montrer que (BD) est l'axe de σ.

Exercice 6 *Bac Tn 1999*

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle ABC tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $AB = 2AC$.

Soient D et D' deux droites parallèles passant respectivement par B et C et ne contenant aucun des côtés du triangle ABC. Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et D'.La droite Δ coupe les droites D et D' respectivement en I et J .

1) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A .

a- Déterminer l'angle et le rapport de S .

b- Soit Ω le centre de S .
Montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2)**a**- Déterminer S(D') et S(Δ)

b- En déduire S(J).

c- Montrer que le cercle de diamètre [IJ] passe par Ω.

Exercice 7 *Bac Tn 2000*

Dans le plan P orienté, on considère un rectangle ABCD tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AB = 2AD$. On désigne par I le milieu de [AB], O le milieu de [BD] et par ($\mathcal{C}$) le cercle circonscrit au rectangle ABCD.
Soit f la similitude directe qui transforme B en I et I en D.

1) Montrer que le rapport de f est $\sqrt{2}$ et que $-\frac{\pi}{4}$ est une mesure de son angle .

2) Soit s la similitude directe de centre C de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{-\pi}{4}$

a) Montrer que $s(B) = I$.

b) Montrer que f o s^{-1} =id_P où id_P est l'application identique du plan

c) En déduire que $f = s$.

3) Soit A'= f(A). Montrer que D est le milieu de [A'I] .
Construire alors le point A'.

4) La demi-droite [CA') recoupe ($\mathcal{C}$) en O'.

a) Calculer CO' et CA' en fonction de CA.

b) En déduire que O' est le milieu de [CA'].

c) Prouver alors que O'= f(O).

Exercice 8 *Bac Tn 2001*

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. Soit D le point du plan tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et soit K le symétrique de B par rapport à A. On désigne par O, I et J les milieux respectifs des segments $[AC],[BC]$ et $[AD]$.

1) Soit s la similitude directe du plan telle que s(J)=B et s(D)=K.

a) Montrer qu'une mesure de l'angle de s est $\frac{\pi}{3}$.

b) Montrer que le rapport de s est 2 (on pourra montrer que le triangle CBK est équilateral).

c) Montrer que C est le centre de la similitude s.

2) Soit A' le symétrique de D par rapport à C et f l'antidéplacement du plan qui transforme D en A et A en A'.

a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques .

b) Montrer que f(K)=C.

3) On pose g=f $\circ$ s.

a) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport .

b) On désigne par Δ l'axe de g et par Ω son centre .
Montrer que g$\circ$g est l'homothétie de centre Ω et et de rapport 4.
Vérifier que $g \circ g$(D)=B.

c) Donner une construction de l'axe Δ de g.

Exercice 9 Du bac Tn 1998

Soit dans le plan orienté, un losange ABCD tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et AB $\geq$ 6 (en cm). Soit R la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AD] et [AC]. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle BCD et O' le centre du cercle circonscrit au triangle ABD.

I-**1**) Soit f $=$ S$_{(DA)}$oR (S$_{(DA)}$ étant la symétrie orthogonale d'axe (DA)).

a- Déterminer la droite Δ telle que R $=$ S$_{(DA)}$ o S$_{\Delta}$.

b- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Soit g $=$ R o S$_{(BC)}$.

a- Déterminer g(B) et g(C).

b- Montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale.

c- Déterminer la nature de g et donner sa forme réduite.

3) On désigne par h l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{2}$ et on pose S $=$ R o h. Soient ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}$') les cercles circonscrits respectivement aux triangles BCD et DKL.

Soit E le point diamétralement opposé à D dans le cercle ($\mathcal{C}$).

a- Déterminer S(B), S(C) et S(E).

b- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S.

c- Montrer que ($\mathcal{C}$') est le cercle de diamètre [DO'].