L. B. Monastir	**Série n : 31**	*4 ème Math*
P.P. : Ali Zouhaier		Séance n : …..
Chapitres : **Intégrale + …**		

Exercice 1 bac (modifié)

On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par: $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx; \forall n \in IN^*$

1/a- Mq $\forall n \in IN^*; 0 \le u_n \le \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

b- En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2/a) Calculer,$\forall n \in IN^*$,l'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x dx$.

b) Mq $\forall n \in IN, u_{n+2} - u_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

3/ Exprimer ,$\forall n \in IN^*$, u_{2n+1} en fonction de n et u_1.

Exercice 2 (6 points)

On pose $u_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ et pour entier nature naturel non nul , $u_n = \int_0^1 \sqrt{x^n(1-x)}\,dx$

1. Calculer u_0.

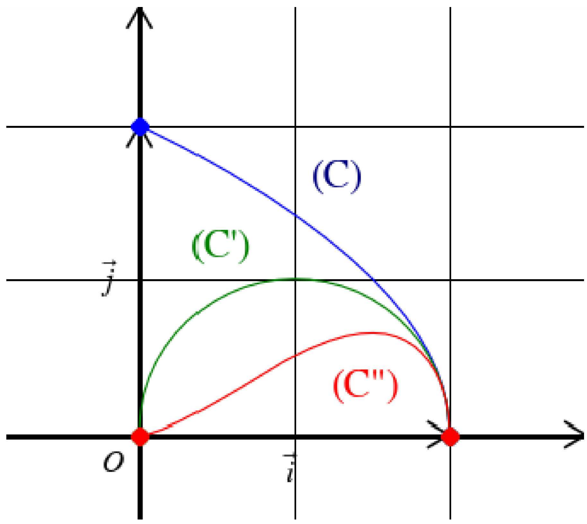
2. a) Montrer $u_2 = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x}\,dx$.

b) En déduire que $u_2 = \frac{4}{15}$.

3. a) Montrer que pour tout entier n , $0 \le u_{n+1} \le u_n$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a représenté ci-dessous trois fonctions f, g et h définies sur $[0,1]$ par : $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ et $h(x) = x\sqrt{1-x}$.



a) Identifier, pour chaque fonction, sa courbe représentative .

b) Montrer que $u_1 = \frac{\pi}{8}$.

Exercice 3 extrait d'un bac

Soit la suite $(I_n)_{n \in IN}$ définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1} \sin t \, dt$.

1/**a**- A l'aide d'un intégration par parties calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t$ dt

b- Calculer alors I_1.

2/ Montrer que $\forall n \in IN^*;\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}$.

3/**a**- Montrer à l'aide de deux intégrations par parties que

$$I_{n+2} + (n+2)(n+3)I_n = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}.$$

b- En déduire la valeur de I_3.

Exercice 4 :(6 points)

A/ Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \tan x$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[0\ ,\ \frac{\pi}{4}]$ sur $[0\ ,\ 1]$.

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0\ ,\ 1]$ et que pour tout $x \in [0\ ,\ 1]$ $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3) En déduire que : $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

B/ On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_0 = \int_0^1 (1-t)\,dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^1 t^{2n}(1-t)\,dt$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_k$. Montrer que $S_n = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2}\left(1-(-1)^n t^{2n}\right)dt$

3) a) On pose $I = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2}\,dt$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I - S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}(1-t)}{1+t^2}\,dt$.

b) Montrer que $\left|I - S_n\right| \leq I_n$.

En déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

Exercice 5

Soit la suite (I_n) définie sur IN par: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt;\ n \in IN$

1/ Calculer I_0 et I_1.

2/ Montrer que $I_2 = \frac{\pi}{4}$.

3/**a**- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t) \times (-\sin t)\cos^n t\ dt$

b- Vérifier que $\cos^{n+2} t = \cos^n t - \sin^2 t \cos^n t$.

c- Déduire enfin que $\forall n \in IN; I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

4/ Calculer enfin I_6 .

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$

1/ Montrer que $I = \int_0^1 f(t)dt$ existe.

2/ Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[;\ \int_0^x \cos t$ dt $\leqslant x$.

3/ Soit la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$ définie par : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$.

a- Montrer que $\forall n \in IN^*;\ I_n \leqslant I$

b- A l'aide de **2**/ prouver que $\forall n \in IN^*;\ \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}$

c- Montrer enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = I$.

Exercice 7 d'après un livre parascolaire.

1/ Soit $u(x) = 2\sin x - 1$ définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Etudier le sens de variation de u sur I et montrer que $u(I) =]-3,\ 1[$.

2/ Soit $F(x) = \int_0^{u(x)} \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$ où $x \in I$.

a- Justifier l'existance de F sur I.

b- Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour $x \in I$ puis calculer $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

c- En déduire que $\forall x \in I,\ F(x) = x - \frac{\pi}{6}$.

3/ Soit $K = \int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$.

a- Vérifier que $K = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0)$.

b- En déduire la valeur de K.

Exercice n°3 : ***(5 points)***

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^3+1}$. On a représenté sa courbe (C) ainsi que la courbe (C') de la restriction de sa fonction dérivée f ' sur $[0,+\infty[$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. *(Voir figure page 4)*.

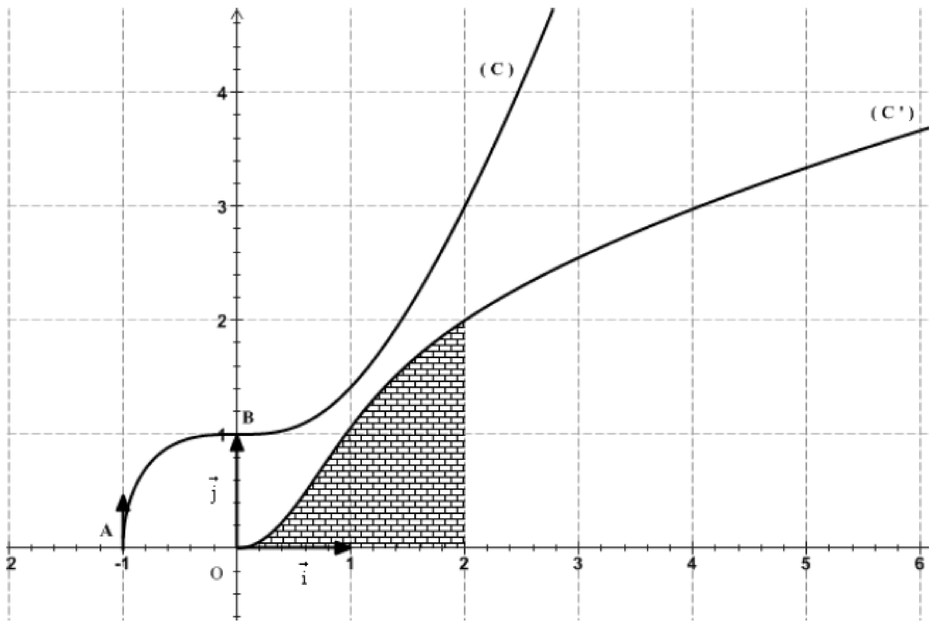
1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en - 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]-1,+\infty[$; puis dresser le tableau de variation de f.

2) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.

3) a) Tracer le cercle de centre O et de rayon 1 dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   b) En utilisant des considérations d'aires, montrer que $\frac{\pi}{4} < \int_{-1}^{0}\sqrt{x^3+1}dx < 1$.

4) On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit S le solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de (C) autour de l'axe $(O,\vec{i})$. Calculer le volume $\mathcal{V}$ de S.



Exercice 9

Soit la suite $(I_n)_{n\in IN}$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x\, dx$.

1/**a**- Montrer que (I_n) est décroisssante sur IN.

b- Montrer que (I_n) est convergente.

2/**a**- Montrer que $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1},\ \forall n \in IN$

b- Déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

3/**a**- Calculer I_0.

b- Déduire que $\frac{\pi}{4} + (-1)^{n-1} I_{2n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1};\ \forall n \geq 2$

(On pourra procéder par itération)

c- Prouver enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots. + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right] = \frac{\pi}{4}$

4/**a**- Exprimer I_{2n+1} en fonction de n et I_1.

b- Montrer donc que $I_1 = 2\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots. + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$