L. B. Monastir	Série n : 43	4 ^{ème} Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Similitudes + ...		

EXERCICE 1(bac 91)

Soit $d \in IR_+^*$. Dans le plan orienté;on considère le carré $OABC$ de centre I tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ et $OA = d.$ Soit J le milieu de $[OI]$.

1/ Soit f la similitude direct telle que $f(O) = I$ et $f(A) = J.$

a- Determiner l'angle et le rapport de f.

b- Construire $C' = f(C).$ Determiner $f(B)$.

c- Soit Ω le centre de $f.$ Montrer que I, O, C et Ω sont cocycliques.Montrer que Ω, O, A et J sont cocycliques. En déduire une construction de Ω.

d- Mq $(O\Omega)$ et (ΩC) sont orthogonales.

2/ Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u};\vec{v})$ tel que A ait pour affixe d . Déterminer la forme complexe de f.

EXERCICE 2 (bac 92 Japon)

Soit ABO est un triangle rectangle en O et tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\quad[2\pi].$ Soit Δ une Droite variable passant par $O.$ On appelle A' et B' les projetés orthogonaux de A et B sur Δ.

1/a- Soit la similitude directe S qui transforme O en A et B en $O.$

Pourquoi S n'est pas une translation?

b- Déterminer l'angle de S.

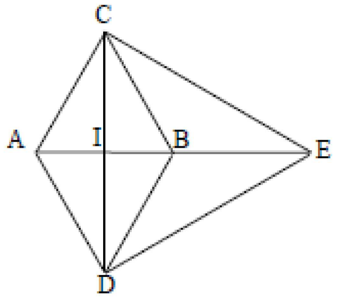
c- Soit Ω le centre de S. Démontrer que Ω appartient au cercles de diametres $[OA]$ et $[OB]$ .En deduire que Ω est le pied de la hauteur du triangle OAB issue de O.

2/ On appelle D la droite passant par B et orthogonal à Δ.

a- Déterminer les images par S des droites D et Δ ;en deduire l'image de B' par S.

b- Déduire de ce qui precède , que le cercle de diamètre $[A'B']$ passe par un point fixe quand Δ varie.

Exercice 3 (5 points)



Dans la figure ci-contre, ABC , ADB et CDE sont trois triangles équilatéraux directs tels que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [AB] .

1. Montrer que AE = 2AB.

Soit S la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ qui envoie A en B et E en D.

2. Déterminer k et vérifier que $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

3. On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle ACE.
Démontrer que le transformé de $(\mathscr{C})$ par S est le cercle $(\mathscr{C}')$ de diamètre [BD] et déduire que l'image du point C par S est le point J milieu de [DE].

4. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$.
   a) Déterminer les affixes des points B, C , D et E.
   b) Donner la forme complexe de S et préciser l'affixe de son centre Ω .

5. Soit S' la similitude directe de centre Ω , de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
   a) Déterminer la nature et les éléments de la transformation $S' \circ S$.
   b) Calculer l'affixe du point A' transformé de A par $S' \circ S$.

EXERCICE 4

On considère un cercle (C) de diamètre $[OB]$.$A \in [OB]\backslash\{O;B\}$. Soit $I = A * B$.

la médiatrice de $[AB]$ intercepte (C) en M et M' tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Désignons par N le projeté orthogonal de A sur (OM).

1/a- Donner la nature de $AMBM'$.

b- En déduire que $(AM')\perp(OM)$ et que N,A et M' sont alignés.

2/ Soit S la similitude de centre N et telle que $S(M) = A$

a- Préciser l'angle de S

b- Préciser les images des droites (MI) et (NA) par S

c- En déduire $S(M')$.

3/a) Soit $I' = O * A$ .Prouver que $S(I) = I'$

b) En déduire que (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$.

4/ Soit f la similitude indirecte telle que $f(M') = N$ et $f(B) = A$.

Posons $\Phi = f \circ S_{(OB)}$.

a- $\Phi(M) = ?$ $\quad$ $\Phi(B) = ?$

b- Déduire que Φ est une homothétie

c- Ecrire alors la forme réduite de f.

EXERCICE 5 (bac 92 France)

Dans le plan orienté on considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 1, BC = 2$ et

$\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On appelle M le milieu de $[BC]$.

1/ Soit s la similitude directe telle que :$s(A) = M$ et $s(B) = D$.

Déterminer le rapport et l'angle de S.

2/ Désignons par O le centre de s.

a- Les droites (AB) et (DM) se coupent en I. Montrer que A, O, M et I sont cocycliques

b- En déduire que $BM = BO = BA$.

c- Démontrer que $DM = DO$.

d- En déduire que O est le symétrique de M par rapport à la droite (BD).

3/ Le plan est muni d'un repère orthonormal direct tel que les affixes des points A, B et D sont respectivement $0; 1$ et $2i$.

a- Déterminer l'expression complexe de s et l'affixe de O.

b- Vérifier que O est le symétrique de M par rapport à la droite (BD) en montrant que $BM = BO$ et que les droites (OM) et (BD) sont orthogonales.

EXERCICE 6

Dans le plan P,on concidère deux cercles (C) et (C') de centres respectifs O etO' de rayon R,tangents exterieurement en un point A. A tout point M de (C) on associe un point M' de (C') tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{O'M'}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

1/ Mq existe une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, dont on construisera géometriquement le centre Ω; qui envoie (C) en (C').

2/a- Mq I le milieu de [MM'] est l'image de M par une similitude f directe de centre Ω.

b- Determiner les élements caracteristiques de f.

c- En deduire le lieu géometriques de I quand M decrit (C).

3/ Donner l'image de O par la similitude f et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{AI}\right)$.